Analyse vectorielle, intégrales multiples

Examen deuxième session juin 2015
Deux heures, documents et calculatrice interdits.
Les quatres exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 3\sin(t),\ z(t) = t \ \text{ avec } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Calculer un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$, puis un vecteur unitaire tangent.

b) Soit $\vec{V_1}$ le champ de vecteurs défini par $\vec{V_1}(x, y, z) = (x + z, y, x)$. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V_1}(M) \cdot d\vec{M}.$$

c) Soit $\vec{V_2}$ le champ de vecteurs défini par $\vec{V_2} = (-y^2 \sin x, 2y \cos x + e^z, ye^z)$. Montrer qu'il existe une fonction f telle que $\vec{V_2} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$.

d) Calculer f.

e) Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{V_2}(M) \cdot d\vec{M}$.

Solution de l'exercice 1.

a) Un vecteur tangent en $M(t)$ est $\vec{V}(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t), 1)$ et un vecteur unitaire tangent est $\vec{U}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 1}}\vec{V}(t)$.

b) On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{V_1}(M) \cdot d\vec{M} &= \int_0^{2\pi} [(x(t) + z(t))x'(t) + y(t)y'(t) + x(t)z'(t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(2\cos(t) + t)(-2\sin(t)) + 3\sin(t)3\cos(t) + 2\cos(t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [5\sin(t)\cos(t) - 2t\sin(t) + 2\cos(t)]dt \\
&= \frac{5}{2}[\sin^2(t)]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + 2[\sin(t)]_0^{2\pi} \\
&= -2\int_0^{2\pi} t\sin(t)dt \\
&= 2[t\cos(t)]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \cos(t)dt = 4\pi
\end{aligned}$$

c) On calcule le rotationnel. On a $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V_2}) = (e^z - e^z, 0 - 0, -2y\sin(x) + 2y\sin(x)) = (0, 0, 0)$. Comme il est nul et que le domaine $\mathbb{R}^3$ est sans trou, un résultat du cours nous donne qu'il existe une fonction f telle que $\vec{V_2} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$.

d) La relation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^2 \sin(x)$ est vérifiée par $f = y^2\cos(x)$. La relation $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x) + e^z$ est vérifiée par $f = y^2\cos(x) + ye^z$. La relation $\dfrac{\partial f}{\partial z} = ye^z$ est aussi vérifiée par $f = y^2\cos(x) + ye^z$. Cette fonction f vérifie les trois relations. Si g est une autre fonction vérifiant $\overrightarrow{\text{grad}}(g) = \vec{V}_2$, alors $f - g$ vérifie $\overrightarrow{\text{grad}}(f - g) = 0$, donc est une fonction constante. La solution générale de l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{V}_2$ est donc une fonction de la forme $f = y^2\cos(x) + ye^z + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

e) Comme $\vec{V}_2$ est un champ de gradient, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} = f(M(2\pi)) - f(M(0)) = f(2,0,2\pi) - f(2,0,0) = c - c = 0.$$

Exercice 2 : Soit $\mathcal{D}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = y^2/9$ et $y = 3x$.

a) Déterminer les points d'intersection des deux courbes.

b) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.

c) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

d) Soit $\mathcal{C}$ la courbe donnée par le bord de $\mathcal{D}$. Sans utiliser la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 dx.$$

e) Calculer cette intégrale en utilisant la formule de Green-Riemann.

Solution de l'exercice 2.

a) Les points d'intersections vérifient l'équation $x = \dfrac{(3x)^2}{9} = x^2$, ce qui donne $x^2 - x = x(x-1) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 1$. Les points d'intersections sont donc $(0,0)$ et $(1,3)$ (ils vérifient bien les deux équations).

b) Le domaine $\mathcal{D}$ est le domaine compris entre la parabole et la droite considérées.

c) L'aire de $\mathcal{D}$ est l'intégrale (qu'on calcule par le théorème de Fubini)

$$\iint_{\mathcal{D}} dxdy = \int_0^3 \left[\int_{y^2/9}^{y/3} dx\right] dy = \int_0^3 [y/3 - y^2/9]dy = [y^2/6 - y^3/27]_0^3 = 9/6 - 1 = 1/2.$$

d) La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion d'un segment paramétré par $x = x$ et $y = 3x$ avec x variant de 0 à 1, et d'un arc parabolique paramétré par $x = y^2/9$, $y = y$ et y variant de 3 à 0. L'intégrale est donc égale à

$$\int_0^1 9x^2 dx - \int_0^3 y^2 d(y^2/9) = 3 - 1/9[y^4/2]_0^3 = 3 - 9/2 = -3/2.$$

e) La formule de Green-Riemann et le théorème de Fubini nous donnent

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 dx = \int_{\mathcal{D}} 2ydy \wedge dx = -2\iint_{\mathcal{D}} ydxdy = -2\int_0^3 \left[\int_{y^2/9}^{y/3} ydx\right] dy.$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 dx = -2\int_0^3 (y^2/3 - y^3/9)dy = -2[y^3/9 - y^4/36]_0^3 = -2(3 - 9/4) = -3/2.$$

Exercice 3 : Soit $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ et $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{V}$ orienté vers l'extérieur. Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs $\vec{V}(z,y,z) = (y^2z+2z^2y, x^3-5z, z^3+z)$.

a) Calculer
$$I = \iiint_{\mathcal{V}} (3z^2+1)dxdydz.$$

b) Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers $\mathcal{S}$ en utilisant la formule de Stokes-Ostrogradsky.

Solution de l'exercice 3.

a) On utilise les coordonnées sphériques $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ et $z = r\cos\phi$. Soit $D = [0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ le domaine de définition de (r,ϕ,θ). On obtient, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_D 3r^2\cos^2\phi r^2\sin\phi drd\phi d\theta + \mathrm{vol}(D)\\
&= 3\iiint_D r^4\cos^2\phi\sin\phi drd\phi d\theta + \frac{4\pi 1^3}{3}\\
&= 3\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r^4 dr\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\phi\sin\phi d\phi\right) + \frac{4\pi}{3}\\
&= 3.2\pi.\frac{1^5}{5}\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^\pi + \frac{4\pi}{3}\\
&= 3.2\pi.\frac{1}{5}.\frac{2}{3} + \frac{4\pi}{3}\\
&= \frac{32\pi}{15}
\end{aligned}$$

b) Comme $\mathrm{div}(\vec{V}) = 3z^2+1$, la formule de Stokes-Ostrogradsky nous donne que le flux vaut
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{V}.\vec{d\sigma} = \iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}\vec{V} dxdydz = I = \frac{32\pi}{15}.$$

Exercice 4 : Soit $\mathcal{V}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les surfaces d'équations $z = x^2+y^2$ et $z = 5-4x^2-4y^2$.

a) Déterminer l'intersection $\mathcal{C}$ de ces deux surfaces.

b) En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer le volume de $\mathcal{V}$.

c) Calculer
$$\iiint_{\mathcal{V}} (x^2+xy+y^2)dxdydz.$$

Solution de l'exercice 4.

a) En combinant les deux équations, on obtient $z = 1$ et $x^2+y^2 = 1$. L'intersection des deux surfaces est donc le cercle dans le plan $z = 1$ de centre $(0,0,1)$ et de rayon 1.

b) On note R le rectangle $[0,1]\times[0,2\pi]$. En utilisant les coordonnées cylindriques et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_R rdrd\theta \int_{r^2}^{5-4r^2} dz\\
&= \iint_R (5r-5r^3)drd\theta = 5.2\pi[r^2/2 - r^4/4]_0^1\\
&= \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}$$

c) De même, en utilisant les coordonnées cylindriques et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} (x^2+xy+y^2)dxdydz &= \iint_R r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)rdrd\theta \int_{r^2}^{5-4r^2} dz \\
&= 5\iint_R (r^3-r^5)(1+\cos\theta\sin\theta)drd\theta \\
&= 5.2\pi.\frac{1}{12} \\
&= \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$