Modélisation d'écoulements à bas nombre de Mach : quelques résultats d'analyse

Yohan Penel[1]

[1]Équipe ANGE (CETMEF – INRIA – UPMC – CNRS)

Travaux en collaboration avec
S. Dellacherie (CEA Saclay), *B. Després* (LJLL), *G. Faccanoni* (Toulon), *B. Grec* (Paris 5), *O. Lafitte* (Paris 13) & *N. Seguin* (LJLL)

Séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions

Paris – 18 janvier 2013

Plan de l'exposé

Modélisation

Paramètre sans dimension : nombre de Mach $\mathcal{M}$ mesurant la compressibilité de l'écoulement

Problématique dans le cas $\mathcal{M} \ll 1$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} \qquad \stackrel{?}{\longleftrightarrow} \qquad \mathcal{P}_0$$

Analyse théorique

- À quel point le modèle incompressible est une bonne approximation du problème compressible ?
- Quelle est la qualité de la convergence ?

Analyse numérique

- Quel est l'équilibre entre la précision de la méthode et l'efficacité de l'algorithme ?
- L'algorithme reproduit-il le phénomène de convergence ?

Convergence vers l'incompressible

Démarche

- Preuve du caractère bien posé du problème à nombre de Mach fixé
- Établissement de bornes uniformes par rapport au nombre de Mach
- Étude de la convergence

Quelques références

- Klainerman & Majda ('81, '82) : modèles barotropes en domaine infini ou périodique avec des conditions initiales *bien préparées*
- Schochet ('94) : analyse de la convergence dans le cas Euler barotrope pour tout type de données initiales par décomposition en opérateurs d'ondes lentes (transport) et d'ondes rapides (équation des ondes)
- Desjardins, Grenier, Lions & Masmoudi ('99) : étude du cas barotrope en domaine borné
- Danchin ('01, '05) : étude du cas barotrope pour des espaces de Besov d'indices critiques
- Alazard ('05) : extension au cas de lois d'état quelconques

Illustration

Équations d'Euler barotrope adimensionnées

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \dfrac{P'(\rho)}{\mathcal{M}^2} \nabla \rho = 0. \end{cases}$$

Changement de variables : $\rho(t,x) = \rho_* \times \left(1 + \frac{\mathcal{M}}{a_*} r\right)$, $a_* = \sqrt{P'(\rho_*)}$

$$\partial_t q + (\mathbf{u} \cdot \nabla) q + \frac{1}{\mathcal{M}} \mathcal{L} q = 0, \qquad q = \begin{pmatrix} r \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} q = \begin{pmatrix} (a_* + \mathcal{M} r) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \dfrac{P'(\rho_* + \frac{\mathcal{M} \rho_*}{a_*} r)}{a_* + \mathcal{M} r} \nabla r \end{pmatrix}$$

Asymptotique

$$q(t,x) = q_{slow}(t,x) + q_{fast}\left(t, \frac{t}{\mathcal{M}}, x\right) + \mathcal{O}(\mathcal{M}).$$

Éléments d'analyse

Outils

- Décomposition de Leray : $\left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^d = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp$
  où $\mathcal{E} = \left\{\mathbf{u} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^d \ : \ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ + \ CL\right\}$
  et $\mathcal{E}^\perp = \left\{\mathbf{u} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^d \ : \ \exists\, \phi \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \mathbf{u} = \nabla\phi\right\}$
  On note $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray sur l'espace des champs solénoïdaux $\mathcal{E}$.
- Inégalités fonctionnelles (Moser, Strichartz)
- Calcul paradifférentiel (Littlewood–Paley)

Paramètres des différentes études théoriques

- Conditions aux limites
- Conditions initiales (bien préparées ou non)
- Lois d'état
- Viscosité

Aspects numériques

Constats

- Schémas explicites : condition de type CFL prohibitive
- Grille 2D cartésienne : la solution ne converge pas vers la solution incompressible lorsque l'on diminue le nombre de Mach

Quelques références

- Klein ('95) : splitting d'opérateurs
- Guillard *et al.* ('99, '04, '08) : développement asymptotique dans les schémas, préconditionnement
- Dellacherie *et al.* ('10, '13) : analyse des schémas à l'aide de la décomposition de Schochet, stabilité des noyaux, prise en compte des conditions aux limites

Construction de modèles intermédiaires

Analyse de la situation : dégénérescence du modèle compressible vers l'incompressible : non satisfaisant car le modèle incompressible ne permet pas de modéliser les **variations de température**

Simulation du modèle compressible à bas Mach : potentiellement source d'**instabilités numériques**

Alternative : utilisation du développement asymptotique pour construire des modèles intermédiaires

Domaines d'applications

- Combustion : Majda, Klein, Najm, ...
- Nucléaire : Bell, Paillère, Dellacherie, ...

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ p(t,L) = p_s(t) > 0. \end{cases}$$

Équations (Euler–Φ pour un gaz parfait)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p u) = \Phi, \\ E = \dfrac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \dfrac{1}{2}\rho |u|^2. \end{cases}$$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ p(t,L) = p_s(t) > 0. \end{cases}$$

Équations adimensionnées

$$\begin{cases} \partial_{t'}\tilde{\rho} + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{u}) = 0, \\ \partial_{t'}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{u}^2) + \dfrac{1}{\mathcal{M}^2}\partial_{x'}\tilde{p} = 0, \\ \partial_{t'}(\tilde{\rho}\tilde{E}) + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{E}\tilde{u} + \tilde{p}\tilde{u}) = \tilde{\Phi}, \\ \qquad \tilde{E} = \dfrac{\tilde{p}}{(\gamma-1)\tilde{\rho}} + \dfrac{\mathcal{M}^2}{2}\tilde{\rho}|\tilde{u}|^2. \end{cases}$$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ p(t,L) = p_s(t) > 0. \end{cases}$$

Équations adimensionnées $\tilde{\xi} = \xi^{(0)} + \mathcal{M}\xi^{(1)} + \mathcal{M}^2\xi^{(2)} + \mathcal{O}(\mathcal{M}^3)$

$$\begin{cases} \partial_{t'}\tilde{\rho} + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{u}) = 0, \\ \partial_{t'}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{u}^2) + \dfrac{1}{\mathcal{M}^2}\partial_{x'}\tilde{p} = 0, \\ \partial_{t'}(\tilde{\rho}\tilde{E}) + \partial_{x'}(\tilde{\rho}\tilde{E}\tilde{u} + \tilde{p}\tilde{u}) = \tilde{\Phi}, \\ \qquad \tilde{E} = \dfrac{\tilde{p}}{(\gamma-1)\tilde{\rho}} + \dfrac{\mathcal{M}^2}{2}\tilde{\rho}|\tilde{u}|^2. \end{cases}$$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ p(t,L) = p_s(t) > 0. \end{cases}$$

Équations (Euler–LM) : ordre 0 dans le développement asymptotique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \\ \partial_x u = \dfrac{(\gamma - 1)\Phi}{\gamma \mathcal{P}(t)} - \dfrac{\mathcal{P}'(t)}{\gamma \mathcal{P}(t)}. \end{cases}$$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ p(t,L) = p_s(t) > 0. \end{cases}$$

Équations (Euler–LM) : ordre 0 dans le développement asymptotique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_x u = \dfrac{(\gamma-1)\Phi}{\gamma \mathcal{P}(t)} - \dfrac{\mathcal{P}'(t)}{\gamma \mathcal{P}(t)}. \end{cases}$$

$p(t,x) = \mathcal{P}(t) + \pi(t,x) + \mathcal{O}(\mathcal{M}^3)$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ \cancel{p(t,L) = p_s(t) > 0.} \end{cases}$$

Équations (Euler–LM) : ordre 0 dans le développement asymptotique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_x u = \dfrac{(\gamma - 1)\Phi}{\gamma \mathcal{P}(t)} - \dfrac{\mathcal{P}'(t)}{\gamma \mathcal{P}(t)}. \end{cases}$$

$p(t,x) = \mathcal{P}(t) + \pi(t,x) + \mathcal{O}(\mathcal{M}^3) \Longrightarrow \mathcal{P}(t) = p_s(t),\ \pi(t,L) = 0$

Construction d'un modèle bas Mach

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \rho(t,0) = \varrho_e(t) > 0, \\ (\rho u)(t,0) = D_e(t) \geqslant 0, \\ u(t,L) = u_s(t). \end{cases}$$

Équations (Euler–LM) : ordre 0 dans le développement asymptotique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_x u = \dfrac{(\gamma-1)\Phi}{\gamma \mathcal{P}(t)} - \dfrac{\mathcal{P}'(t)}{\gamma \mathcal{P}(t)}. \end{cases}$$

$$\mathcal{P}'(t) = -\frac{\gamma}{L}\left(u_s(t) - \frac{D_e(t)}{\varrho_e(t)}\right)\mathcal{P}(t) + \frac{\gamma-1}{L}\int_0^L \Phi(t,x)\,\mathrm{d}x, \ \pi(t,L) = 0$$

Couplage hyperbolique–elliptique

Variables

- Y : fraction massique de la phase vapeur
- ϕ : potentiel de vitesse

Modèle Abstrait de Vibration de Bulles

$$\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega] \qquad \begin{cases} \partial_t Y + \nabla\phi \cdot \nabla Y = 0\,, \\ \Delta\phi = \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega Y(t, \mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \right]. \end{cases}$$

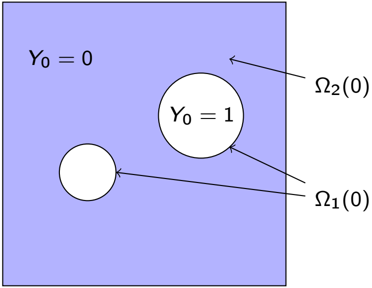
Pulsation (donnée) : $\psi \in \mathscr{C}^0(0, +\infty)$

Conditions initiales et aux limites

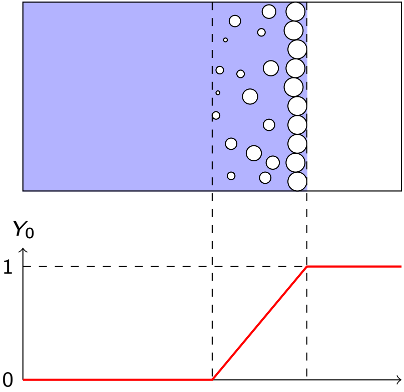
$$Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \Delta\phi_0 = \mathcal{G}_{Y_0}$$

$$\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{condition de } \textbf{jauge} : \int_\Omega \phi(t, \mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

Modélisation d'écoulements à bulle



- Solutions **faibles**
- **Interface** de la bulle : surface de **discontinuité** de Y
- Résolution de l'équation de transport sur Y : algorithme de **capture d'interface**



- Solutions **classiques**
- Y permet la **localisation** des zones de liquide, mélange et vapeur

Caractère bien posé

On note $s_0 = \left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor + 1$.

Théorème (S. Dellacherie & O. Lafitte, '05 ; Y.P., '09)

Soit $Y_0 \in \mathrm{H}^s(\Omega)$, $s \geqslant s_0 + 1$. *Alors il existe* $\mathcal{T} > 0$ *pour lequel le modèle ABV admet une unique solution classique* Y *sur* $[0, \mathcal{T}]$. *On a de plus :*

$$Y \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) := \mathscr{C}^0\big([0,\mathcal{T}], \mathrm{L}^2(\Omega)\big) \cap \mathrm{L}^\infty\big([0,\mathcal{T}], \mathrm{H}^s(\Omega)\big).$$

Proposition (Y.P., '09)

La solution existe sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$, *avec* $\mathcal{T}_* > 0$ *donné par :*

$$\left\| Y_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega Y_0(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}_*} |\psi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant C_*(s, d, \Omega).$$

Ébauche de la preuve

- **Construction d'une suite** $(Y^{(k)})$ par linéarisation du système
- Caractère **borné** dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$:
  - $y_k := \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}}$ solution de $y_{k+1} \leqslant C(\mathcal{T})e^{y_k}$
  - Condition suffisante de convergence de la suite : $C(\mathcal{T}) \leqslant 1/e$
  - $(Y^{(k)})$ est bornée dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \Longrightarrow (Y^{(k)}) \overset{\star}{\rightharpoonup} \tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$
- **Convergence forte** dans $\mathcal{W}_{0,\mathcal{T}}(\Omega)$
  - Inégalité de contraction
  - Suite de Cauchy quel que soit $t \leqslant \mathcal{T}$
  - Complétude de $\mathcal{W}_{0,\mathcal{T}}(\Omega)$
- Interpolation : **convergence forte** vers $\tilde{Y}$ dans $\mathcal{W}_{s',\mathcal{T}}(\Omega)$ pour tout $s' < s$
- Utilisation de la continuité pour montrer que $\tilde{Y}$ est bien **solution** du problème $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega Y^n(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $\mathrm{L}^\infty\big([0, \mathcal{T}] \times \Omega\big)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega Y^n(t, \mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $\mathrm{L}^\infty\big([0, \mathcal{T}] \times \Omega\big)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Reformulation adaptée au concept de **solutions faibles** :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \cdot (Y \nabla \phi) = \psi(t) Y \left(Y - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega Y(t, \mathbf{x}') \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \right), \\ \quad Y(t = 0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega Y(t, \mathbf{x}') \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \right), \\ \quad \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega Y^n(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $\mathrm{L}^\infty\big([0, \mathcal{T}] \times \Omega\big)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

En utilisant le **principe de renormalisation**, on prouve :

Lemme

Les termes de la suite (μ_n) vérifient les équations (au sens fort) :

$$\mu_n' = \psi(\mu_{n+1} - \mu_1 \mu_n).$$

Moyenne des solutions

Théorème (Y.P., ’10)

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\displaystyle\int_\Omega [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp\big[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})\big] \, \mathrm{d}\mathbf{x}}{\displaystyle\int_\Omega \exp\big[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})\big] \, \mathrm{d}\mathbf{x}}, \qquad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Lorsque Y est la fonction indicatrice du domaine $\Omega_1(t)$, alors :

$$\mu_1(t) = \mu_n(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega_1(0)| \exp \Psi(t)}{|\Omega| - |\Omega_1(0)| + |\Omega_1(0)| \exp \Psi(t)}.$$

représente le **volume relatif de la bulle**. Ce résultat fournit un **test de précision** pour les simulations.

Moyenne des solutions (principe du maximum)

Théorème (Y.P., '10)

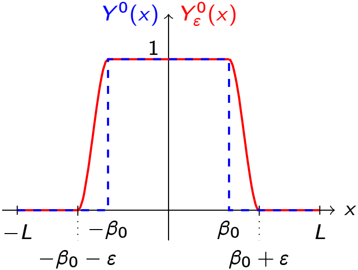
Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\displaystyle\int_\Omega [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp\big[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})\big]\,\mathrm{d}\mathbf{x}}{\displaystyle\int_\Omega \exp\big[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})\big]\,\mathrm{d}\mathbf{x}}, \qquad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Proposition

Soit Y une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. On suppose que Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ presque partout. Alors il en est de même pour $Y(t, \cdot)$ pour presque tout t.

Dimension 1 : démarche



$$Y^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-L, -\beta_0-\varepsilon[\cup]\beta_0+\varepsilon, L], \\ \Lambda\left(2\dfrac{x+\beta_0}{\varepsilon}+1\right) & \text{si } x \in [-\beta_0-\varepsilon, -\beta_0], \\ \Lambda\left(2\dfrac{\beta_0-x}{\varepsilon}+1\right) & \text{si } x \in [\beta_0, \beta_0+\varepsilon], \\ 1 & \text{si } x \in]-\beta_0, \beta_0[. \end{cases}$$

Dimension 1 : vers une solution explicite

On utilise la **méthode des caractèristiques**. Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}_\varepsilon}{\mathrm{d}t} = u_\varepsilon\big(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)\big), \qquad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

Pour $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon]$, $x \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, x)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible.

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0\big(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)\big).$$

Dimension 1 : vers une solution explicite

On utilise la **méthode des caractèristiques**. Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}_\varepsilon}{\mathrm{d}t} = u_\varepsilon\big(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)\big), \qquad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

Pour $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon]$, $x \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, x)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible.

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0\big(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)\big).$$

Problème : $\mathcal{T}_\varepsilon$ (prescrit par le théorème d'existence en temps fini) tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$! On ne peut donc conclure.

Dimension 1 : vers une solution explicite

L'équation du jacobien s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_{x_0}\mathcal{X}_\varepsilon(t;x_0) &= \exp\left[\int_0^t \partial_x u_\varepsilon\big(\tau,\mathcal{X}_\varepsilon(\tau;x_0)\big)\,\mathrm{d}\tau\right], \\
&= \exp\left[\int_0^t \psi(\tau)\left[Y_\varepsilon\big(\tau,\mathcal{X}_\varepsilon(\tau;x_0)\big)-\mu_\varepsilon(\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau\right], \\
&= e^{\Psi(t)Y_\varepsilon^0(x_0)}\exp\left[-\int_0^t \psi(\tau)\mu_\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{2L\exp\left[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(x_0)\right]}{\displaystyle\int_{-L}^{L}\exp\left[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(y)\right]\,\mathrm{d}y}.
\end{aligned}$$

On intègre alors cette dernière égalité par rapport à x_0, ce qui donne :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t;x_0) = 2L\frac{\displaystyle\int_{-L}^{x_0}\exp\left[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(y)\right]\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{-L}^{L}\exp\left[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(y)\right]\,\mathrm{d}y} - L.$$

Dimension 1 : vers une solution explicite

Théorème (Y.P., '10)

Soient $Y_0 \in \mathrm{L}^\infty(-L, L)$ *et* ψ *continue. Alors une solution faible globale en temps de* $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ *est donnée par* $\mathcal{Y}(t,x) = Y_0\big(\Theta_t^{-1}(x)\big)$, *où* Θ_t^{-1} *est la réciproque (par rapport à* x_0*) de la fonction :*

$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\displaystyle\int_{-L}^{x_0} \exp \Psi(t) Y^0(y)\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{-L}^{L} \exp \Psi(t) Y^0(y)\,\mathrm{d}y} - L.$$

Idées de base dans la preuve

- Changement de variables lipschitzien [*Evans et Gariepy*, **CRC-Press**, 1992]
- Validité de l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$
- Calcul de la quantité : $\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \displaystyle\iint \mathcal{Y}\big[\partial_t \varphi + \mathcal{U}\partial_x \varphi\big](t,x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$

Caractère bien posé

Modèle

$$\mathcal{ABV}[Y_0,\psi,\Omega] \qquad \begin{cases} \partial_t Y + \nabla\phi\cdot\nabla Y = 0\,, \\ \Delta\phi = \psi(t)\left[Y(t,\mathbf{x}) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega Y(t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\right]. \end{cases}$$

Structure analogue aux *équations d'Euler incompressibles 2D* (Yudovich, '63)

Application des résultats de DiPerna & Lions, '89 :

Théorème (Y.P., '12)

Soit $Y_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Il existe une unique solution renormalisée au problème $\mathcal{ABV}[Y_0,\psi,\Omega]$.

Modèle

Système $\mathcal{DLMN}$ – S. Dellacherie, '05 ; Y.P., '09

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \boldsymbol{\theta} = (Y, T, P) \end{cases}$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$

Modèle

Système $\mathcal{DLMN}$ – S. Dellacherie, '05 ; Y.P., '09

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \boldsymbol{\theta} = (Y, T, P) \end{cases}$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \quad \Longrightarrow \quad P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Modèle

Système $\mathcal{DLMN}$ – (découplage du champ de vitesse)

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \Delta\phi = \mathcal{G}_\theta \,, \quad \nabla\cdot\mathbf{w} = 0 \\ \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla\pi + \mu\Delta\mathbf{w} + \rho\mathbf{g} - \rho D_t \nabla\phi \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla\cdot(\kappa\nabla T) \\ \boldsymbol{\theta} = (Y, T, P) \,, \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\phi \end{cases}$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t\rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta\nabla\cdot(\kappa\nabla T)}{P} \quad \Longrightarrow \quad P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Caractère bien posé

Théorème (S. Dellacherie, O. Lafitte & Y.P., '09)

Supposons $s \geqslant s_0 + 3$, $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathrm{H}^s(\mathbb{T}^d)$ *tel que* $x \in \mathbb{T}^d$, $\boldsymbol{\theta}_0(x) \in G_0$ *avec* $\overline{G_0} \subset \Theta$, *et* $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d)$. *Alors il existe* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\|\boldsymbol{\theta}_0\|_s, \|\mathbf{u}_0\|_s) > 0$ *pour lequel le système* $\mathcal{DLMN}$ *admet une unique solution classique* $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \nabla\pi)$ *de régularité :*

- $T, P \in \mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $Y \in \mathcal{X}_{s-1,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{X}_{s-2,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$;
- $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-1,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-3,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$;
- $\nabla\pi \in \mathcal{X}_{s-3,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$.

Espace fonctionnel

$$\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d) := \mathscr{C}^0\big([0,\mathcal{T}], \mathrm{L}^2(\Omega)\big) \cap \mathrm{L}^\infty\big([0,\mathcal{T}], \mathrm{H}^s(\Omega)\big) \cap \mathrm{L}^2\big([0,\mathcal{T}], \mathrm{H}^{s+1}(\Omega)\big)$$

Espace physique

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta_1 \in [0,1],\ \theta_2 > 0,\ \theta_3 > 0\}$$

Lois d'état

On suppose que les éléments de $\{\rho, \kappa, \alpha, c_p, \mu, \beta, \Gamma\}$ vérifient

$$\xi(Y, T, P) = \ell_\xi\big(Y, \xi_1(T, P), \xi_2(T, P)\big),$$

pour ℓ_ξ satisfaisant les propriétés :

- $\forall\,(y, x_1, x_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, $\ell_\xi(y, x_1, x_2) = \ell_\xi(1-y, x_2, x_1)$;
- $\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\ell_\xi(1, x_1, x_2) = x_1$;
- $\forall\,(y, x_1) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, $\ell_\xi(y, x_1, x_1) = x_1$.
- $\forall\,(y, x_1, x_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, $x_1 x_2 \neq 0 \Longrightarrow \ell_\xi(y, x_1, x_2) \neq 0$;
- $\forall\,(y, x_1, x_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, $x_1 x_2 > 0 \Longrightarrow x_1 \ell_\xi(y, x_1, x_2) > 0$.

Par ailleurs, on suppose que les lois d'état dans chaque phase sont telles que les fonctions

- ρ_i, $c_{p,i}$ et Γ_i sont non nulles dans un ouvert non vide $G_1 \subset \{(T, P) \in \mathbb{R}^2 \;:\; T > 0,\; P > 0\}$;
- μ_i/ρ_i et $\kappa_i/(\rho_i c_{p,i})$ sont strictement positives sur G_1.

Just for fun

Les suites d'itérées de Picard sont bornées

$$\|Y^{(k)}\|_{s-1,\mathcal{T}} \leqslant R_1,\ \|(T,P)^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}} \leqslant R_1,$$
$$\|\mathbf{u}^{(k)}\|_{s-1,\mathcal{T}} \leqslant R_2,\ \sup_{t\in[0,\mathcal{T}]} |(T,P)^{(k)} - (T_0,P_0)|_\infty \leqslant \delta_G$$

pour R_1, R_2 et $\mathcal{T} \geqslant \max\{\mathcal{T}_\clubsuit, \mathcal{T}_\diamondsuit, \mathcal{T}_\heartsuit, \mathcal{T}_\spadesuit\}$ tels que

$$\|Y_0\|_s^2(1+\mathcal{T}_\clubsuit)\exp\left[C_{a,4}R_2\sqrt{\mathcal{T}_\clubsuit}\right] \leqslant R_1^2$$

$$\exp\left[C_{ad,0}\mathcal{T}_\diamondsuit\left(C_D(R_1)\left\{R_1^2 + e^{C_{a,4}R_2\sqrt{\mathcal{T}_\diamondsuit}}\|Y_0\|_s^2\right\} + R_2^2 + 1\right)\right]$$
$$\times\left[\|\underline{\boldsymbol{\theta}}_0\|_s^2 + C_{ad,1}\mathcal{T}_\diamondsuit\left(C_{F,1}(R_1) + C_{F,2}(R_1)\left\{R_1^2 + e^{C_{a,4}R_2\sqrt{\mathcal{T}_\diamondsuit}}\|Y_0\|_s^2\right\}\right)\right] \leqslant R_1^2$$

$$2C_{sob}^2\mathcal{T}_\heartsuit\exp\left[C_{\xi,1}\mathcal{T}_\heartsuit\right]\left(C_{F,3} + C_{F,4}\|\underline{\boldsymbol{\theta}}_0\|_s^2\right) \leqslant \delta_G^2$$

$$e^{[(C_{u,1}+C_{u,4})(R_1,R_2)]\mathcal{T}_\spadesuit}\left(\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,2}(R_1,R_2)\mathcal{T}_\spadesuit + C_{u,3}(R_1)\right) \leqslant R_2^2$$

Modèle de cœur

Modèle $\mathcal{LMNC}$ (groupe de travail CDMATH)

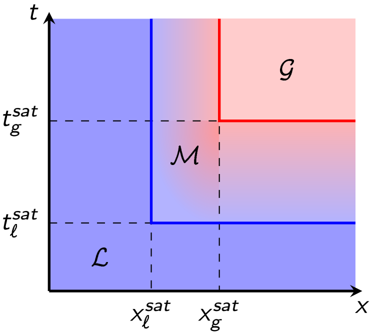
$$\begin{cases} \rho(h,p_0)\cdot[\partial_t h + \mathbf{u}\cdot\nabla h] = \Phi, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = \dfrac{\beta(h,p_0)}{p_0}\Phi, \\ \rho(h,p_0)\cdot[\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] + \nabla\pi - \mu\Delta\mathbf{u} = \rho(h,p_0)\boldsymbol{g}. \end{cases}$$

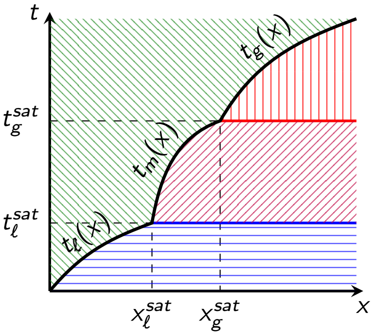
Commentaires

- Modélisation des réactions de fission via le terme de densité de puissance Φ
- Pression extérieure supposée constante
- Changement de phase pris en compte à travers la loi d'état

$$\rho(h,p_0) = \begin{cases} \rho_l(h,p_0), & \text{si } h \leqslant h_l^{sat}, \\ (1-\psi)\rho_l^{sat} + \psi\rho_g^{sat}, & \text{si } h_l^{sat} < h < h_g^{sat}, \\ \rho_g(h,p_0), & \text{si } h \geqslant h_g^{sat}. \end{cases}$$

Solutions instationnaires (gaz raidis)





$$h(t,x) = \begin{cases} q_\ell + (h_0 - q_\ell)e^{\hat{\Phi}_\ell t}, & \text{si } (t,x) \in \mathcal{L} \text{ et } t < t_\ell(x), \\ q_m + (h_\ell^{sat} - q_m)e^{\hat{\Phi}_{\boldsymbol{m}}(t - t_\ell^{\boldsymbol{sat}})}, & \text{si } (t,x) \in \mathcal{M} \text{ et } t < t_m(x), \\ q_g + (h_g^{sat} - q_g)e^{\hat{\Phi}_{\boldsymbol{g}}(t - t_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{sat}})}, & \text{si } (t,x) \in \mathcal{G} \text{ et } t < t_g(x), \\ h_e + \frac{\Phi_{\boldsymbol{0}}}{D_{\boldsymbol{e}}} x, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Couplage

?

$\varrho_e,\ u_e$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_x u = \dfrac{-1}{\gamma \mathcal{P}(t)} \left[\mathcal{P}'(t) - (\gamma - 1)\Phi \right]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p u) = \Phi. \end{cases}$$

p_s

0 α L x

Couplage

$$\begin{cases} \rho(t,\alpha^-) = \rho(t,\alpha^+), \\ u(t,\alpha^-) = u(t,\alpha^+), \\ \mathcal{P}(t) = p(t,\alpha^+), \\ \pi(t,\alpha^-) = 0. \end{cases}$$

ϱ_e, u_e

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0, \\ \partial_x u = \dfrac{-1}{\gamma \mathcal{P}(t)} \left[\mathcal{P}'(t) - (\gamma - 1)\Phi \right]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p u) = \Phi. \end{cases}$$

p_s

0 α L x

Couplage

$$\begin{cases} \rho_\infty(x) = \varrho_\alpha \dfrac{\Gamma(\mathcal{P}_\alpha + 1) + \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha - \Gamma + 1)^2 - (2\Gamma - 1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}}{2\Gamma\mathcal{P}_\alpha + 1 + \overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}, \\[2ex] p_\infty(x) = \dfrac{D_e^2}{(2\Gamma - 1)\varrho_\alpha}\left[(\Gamma - 1)(\mathcal{P}_\alpha + 1) + \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha - \Gamma + 1)^2 - (2\Gamma - 1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}\right], \\[2ex] u_\infty(x) = \dfrac{D_e}{(2\Gamma - 1)\varrho_\alpha}\left[\Gamma(\mathcal{P}_\alpha + 1) - \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha - \Gamma + 1)^2 - (2\Gamma - 1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}\right]. \end{cases}$$

$\varrho_e,\ u_e$

$$\begin{cases} \rho_\infty(x) = \dfrac{\varrho_e}{1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{\Psi}x}{\Gamma L\mathcal{P}_\alpha}}, \\[2ex] p_\infty(x) = \dfrac{D_e^2\mathcal{P}_\alpha}{\varrho_e}, \\[2ex] \pi_\infty(x) = \dfrac{D_e^2}{2\varrho_e}\dfrac{\overline{\Phi}}{\Gamma p_\alpha}\dfrac{\alpha - x}{L}, \\[2ex] u_\infty(x) = \dfrac{D_e}{\varrho_e}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{\Psi}x}{\Gamma L\mathcal{P}_\alpha}\right). \end{cases}$$

p_s

$0 \qquad \alpha \qquad L \qquad x$

Couplage

$$
\begin{cases}
\varrho_\alpha = \dfrac{\varrho_e}{1+\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Psi}_\alpha}{\Gamma L \mathcal{P}_\alpha}}, \\[2ex]
0 = \mathcal{P}_\alpha^3 - 2(\Gamma-1)(1-\mathcal{P}_0)\mathcal{P}_\alpha^2 \\
\qquad + \left[2(\Gamma-1)\mathcal{P}_0 - (2\Gamma-1)\mathcal{P}_0^2 - \left(1-\frac{\alpha}{\Gamma L}\right)\overline{\Psi}\right]\mathcal{P}_\alpha + \frac{\Gamma-1}{\Gamma}\,\frac{\alpha}{L}\,\overline{\Psi}\mathcal{P}_0.
\end{cases}
$$

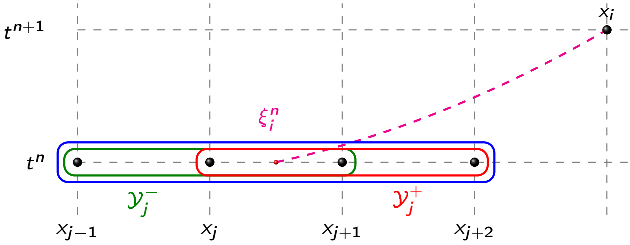
$$
\begin{cases}
\rho_\infty(x) = \varrho_\alpha\,\dfrac{\Gamma(\mathcal{P}_\alpha+1) + \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha-\Gamma+1)^2 - (2\Gamma-1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}}{2\Gamma\mathcal{P}_\alpha + 1 + \overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}, \\[2ex]
p_\infty(x) = \dfrac{D_e^2}{(2\Gamma-1)\varrho_\alpha}\left[(\Gamma-1)(\mathcal{P}_\alpha+1) + \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha-\Gamma+1)^2 - (2\Gamma-1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}\right], \\[2ex]
u_\infty(x) = \dfrac{D_e}{(2\Gamma-1)\varrho_\alpha}\left[\Gamma(\mathcal{P}_\alpha+1) - \sqrt{(\Gamma\mathcal{P}_\alpha-\Gamma+1)^2 - (2\Gamma-1)\overline{\Psi}\,\frac{x}{L-\alpha}}\right].
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\rho_\infty(x) = \dfrac{\varrho_e}{1+\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Psi}x}{\Gamma L\mathcal{P}_\alpha}}, \\[2ex]
p_\infty(x) = \dfrac{D_e^2\mathcal{P}_\alpha}{\varrho_e}, \\[2ex]
\pi_\infty(x) = \dfrac{D_e^2}{2\varrho_e}\,\dfrac{\overline{\Phi}}{\Gamma p_\alpha}\,\dfrac{\alpha-x}{L}, \\[2ex]
u_\infty(x) = \dfrac{D_e}{\varrho_e}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Psi}x}{\Gamma L\mathcal{P}_\alpha}\right).
\end{cases}
$$

$\varrho_e,\ u_e$ $\qquad$ p_s

$0 \qquad \alpha \qquad L \qquad x$

Méthode des caractéristiques numérique



Schéma

$$\boxed{Y_i^{n+1} = \alpha_{ij}^n Y_{ij}^- + (1-\alpha_{ij}^n) Y_{ij}^+}$$

$$\theta_{ij}^n = \frac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$$

	$\mathcal{P}_j^+(\theta_{ij}^n) \geqslant 0$	$\mathcal{P}_j^+(\theta_{ij}^n) < 0$
$\mathcal{P}_j^-(\theta_{ij}^n) \geqslant 0$	$\alpha_{ij}^n = \frac{1+\theta_{ij}^n}{3}$, $Y_{ij}^\pm = \mathcal{Y}_j^\pm$	$\alpha_{ij}^n = 1$, $Y_{ij}^\pm = \mathcal{Y}_j^\pm$
$\mathcal{P}_j^-(\theta_{ij}^n) < 0$	$\alpha_{ij}^n = 0$, $Y_{ij}^\pm = \mathcal{Y}_j^\pm$	$\alpha_{ij}^n = \theta_{ij}^n$, $Y_{ij}^- = Y_j^n$, $Y_{ij}^+ = Y_{j+1}^n$

Méthode **inconditionnellement stable** (L^∞, L^2) et d'ordre 2 en espace-temps

Conclusion

Bilan

- Construction de nouvelles familles de modèles
- Étude de couplages caractéristiques de ces modèles
- Développement/utilisation d'outils numériques différents
- Apport qualitatif par la construction de solutions (in)stationnaires explicites

Perspectives

- Enrichissement des modèles par la physique
- Prolongement des études théoriques à la dimension 2 et à d'autres espaces fonctionnels
- Couplages de codes
- Approche applicable à d'autres problématiques

MERCI DE VOTRE ATTENTION

...et rendez-vous à Seignosse du 27 au 31 mai 2013
pour le 6ème congrès SMAI