

# Équations d'Euler et positivité : adaptation des schémas classiques

**Yohan Penel<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>LRC Manon – UPMC-LJLL, Paris 6

*Travaux réalisés en collaboration avec  
C. Calgaro, E. Creusé (INRIA Lille) & T. Goudon (INRIA Sophia-Antipolis)*

Groupe de Travail  
**Modélisation et Calcul Scientifique**

Laboratoire Jean Leray, Nantes – 06 février 2012

# Problématique

- **Système de lois de conservation** modélisant un phénomène physique (mécanique des fluides, ...) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{W}) = 0, \\ \mathbf{W}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}). \end{cases}$$

- **Contraintes physiques** :  $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$

- Principe du maximum (densité pour Euler incompressible)
- Positivité (densité et pression pour Euler compressible)

# Problématique

- 🐞 **Système de lois de conservation** modélisant un phénomène physique (mécanique des fluides, ...) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{W}) = 0, \\ \mathbf{W}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}). \end{cases}$$

- 🐞 **Contraintes physiques** :  $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$ 
  - ➡ Principe du maximum (densité pour Euler incompressible)
  - ➡ Positivité (densité et pression pour Euler compressible)
- 🐞 Vérification des contraintes d'un point de vue **théorique**

# Problématique

- 🐛 **Système de lois de conservation** modélisant un phénomène physique (mécanique des fluides, ...) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{W}) = 0, \\ \mathbf{W}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}). \end{cases}$$

- 🐛 **Contraintes physiques** :  $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$

- ➡ Principe du maximum (densité pour Euler incompressible)
- ➡ Positivité (densité et pression pour Euler compressible)

- 🐛 Vérification des contraintes d'un point de vue **théorique**

- 🐛 Vérification au niveau **numérique** (robustesse) ? À quel prix ?

- ➡ Précision
- ➡ Efficacité

# Exemple type

Équations d'Euler pour un fluide parfait en dimension 2 :

$$\mathbf{W} = {}^t(\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E), \quad \mathcal{F} = {}^t(\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathcal{I}_2, (\rho E + p) \mathbf{u})$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{R}^4 : \rho = W_1 > 0 \text{ et } p = (\gamma - 1) \left[ W_4 - \frac{W_2^2 + W_3^2}{2W_1} \right] > 0 \right\}$$

# Exemple type

Équations d'Euler pour un fluide parfait en dimension 2 :

$$\mathbf{W} = {}^t(\rho, \rho\mathbf{u}, \rho E), \quad \mathcal{F} = {}^t(\rho\mathbf{u}, \rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathcal{I}_2, (\rho E + p)\mathbf{u})$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{R}^4 : \rho = W_1 > 0 \text{ et } p = (\gamma - 1) \left[ W_4 - \frac{W_2^2 + W_3^2}{2W_1} \right] > 0 \right\}$$

**Problème de Riemann** :  $\mathbf{W}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{W}_l, & \text{si } x_1 < 0, \\ \mathbf{W}_r, & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$

**Vide et raréfactions** (Einfeldt, Munz, Roe & Sjögreen, 1991)

- $\rho_0 > 0, u_0 > 0, E_0 > u_0^2/2$
- $\mathbf{W}_l = (\rho_0, -\rho_0 u_0, 0, \rho_0 E_0)$  et  $\mathbf{W}_r = (\rho_0, \rho_0 u_0, 0, \rho_0 E_0)$
- Si  $\frac{4\gamma}{3\gamma - 1} E_0 > u_0^2$ , alors la pression et la densité restent **positives**.

# Schémas préservant la positivité

## Étude à l'ordre 1

- Einfeldt *et al.* (1991), Bouchut (2004)
- **Godunov, Rusanov, HLLs / Roe**

# Schémas préservant la positivité

## Étude à l'ordre 1

- Einfeldt *et al.* (1991), Bouchut (2004)
- **Godunov, Rusanov, HLLs / Roe**

## Étude à l'ordre 2 : méthodes de type volumes finis + MUSCL

- **Équations scalaires** : Clain & Clauzon (2010), Calgaro *et al.* (2010)
  - ➔ Adaptation de limiteurs
  - ➔ Adaptation de la condition CFL
- **Systèmes de lois de conservation** : reconstruction ...
  - ➔ ... *monopente* (construction d'un gradient par cellule) : Perthame & Shu (1996)
  - ➔ ... *multipente* (construction d'un gradient par interface) : Berthon (2006)



# Schémas préservant la positivité

## Étude à l'ordre 1

- Einfeldt *et al.* (1991), Bouchut (2004)
- **Godunov, Rusanov, HLLs / Roe**

## Étude à l'ordre 2 : méthodes de type volumes finis + MUSCL

- **Équations scalaires** : Clain & Clauzon (2010), Calgaro *et al.* (2010)
  - Adaptation de limiteurs
  - Adaptation de la condition CFL
- **Systèmes de lois de conservation** : reconstruction ...
  - ... *multi-pente* (construction d'un gradient par interface) : Berthon (2006)
    - Utilisation de la **convexité** de  $\mathcal{W}$
    - Adaptation de la **reconstruction**
    - Construction d'un **état supplémentaire** dans chaque cellule
    - **Décomposition** du schéma bi-dimensionnel d'ordre 2 **en combinaison convexe** de schémas mono-dimensionnel d'ordre 1

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{|\Omega_i^*|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Omega_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_{ij}^n$$

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{|\Omega_i^*|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Omega_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_{ij}^n$$

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{|\Omega_i^*|}{|\Omega_i|} \overline{\mathbf{W}}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Omega_{ij}|}{|\Omega_i|} \overline{\mathbf{W}}_{ij}$$

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, n_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{|\Omega_i^*|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Omega_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathbf{W}_{ij}^n$$

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{|\Omega_i^*|}{|\Omega_i|} \overline{\mathbf{W}}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Omega_{ij}|}{|\Omega_i|} \overline{\mathbf{W}}_{ij}$$

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^n - \frac{\Delta t}{\ell} [\mathcal{F}(\mathbf{W}^n, \mathbf{V}^n, n) - \mathcal{F}(\mathbf{W}^n, \mathbf{W}^n, n)]$$

Hypothèses sur le flux 1D  $\mathcal{F}$  et sur le pas de temps  $\Delta t$

## Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, n_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \eta_i^* \mathbf{W}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n$$

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \eta_i^* \bar{\mathbf{W}}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \bar{\mathbf{W}}_{ij}$$

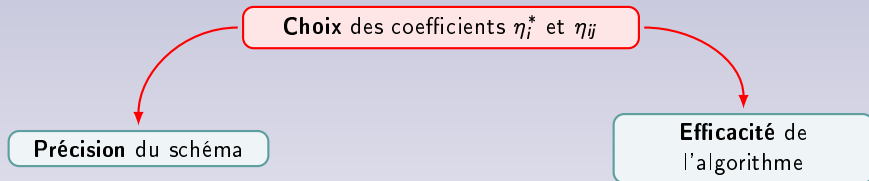
$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^n - \frac{\Delta t}{\ell} [\mathcal{F}(\mathbf{W}^n, \mathbf{V}^n, n) - \mathcal{F}(\mathbf{W}^n, \mathbf{W}^n, n)]$$

Hypothèses sur le flux 1D  $\mathcal{F}$  et sur le pas de temps  $\Delta t$

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

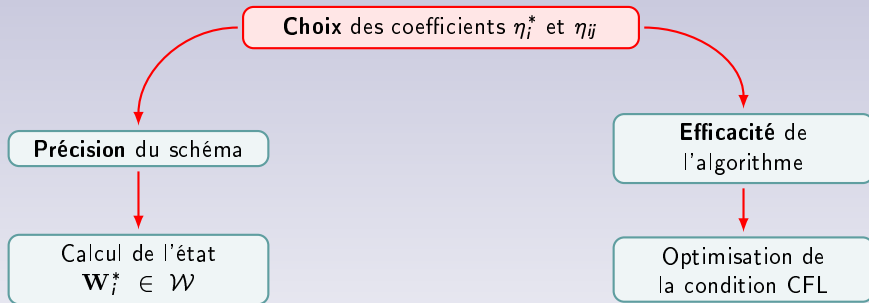
Choix des coefficients  $\eta_i^*$  et  $\eta_{ij}$

# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)

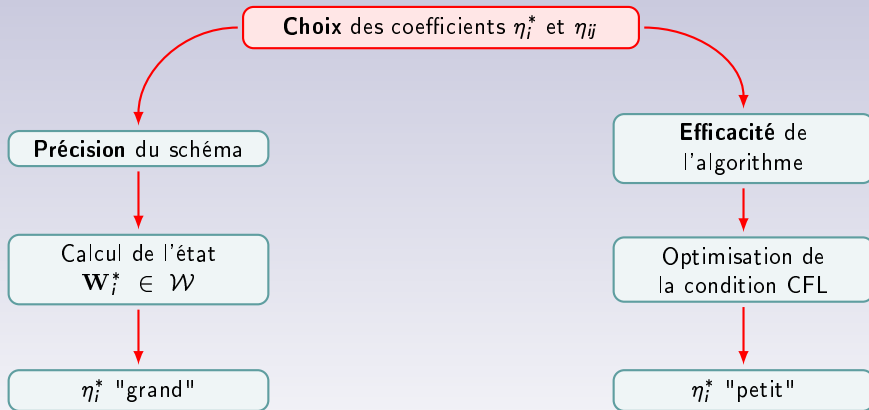




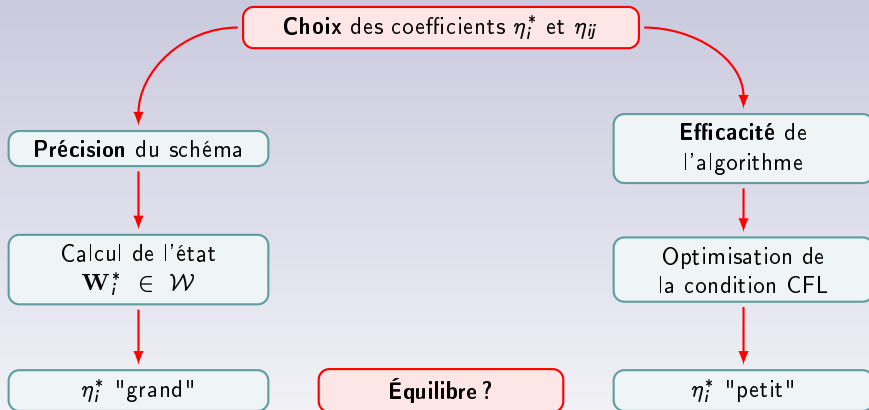
# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)



# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)



# Adaptation de la démarche de C. Berthon (2006)



# Plan de l'exposé

## 1 Construction d'états physiques

- Reconstruction
- État intermédiaire

## 2 Calcul du pas de temps

- Formule algébrique
- Optimisation

## 3 Simulations

# Plan de la partie

## 1 Construction d'états physiques

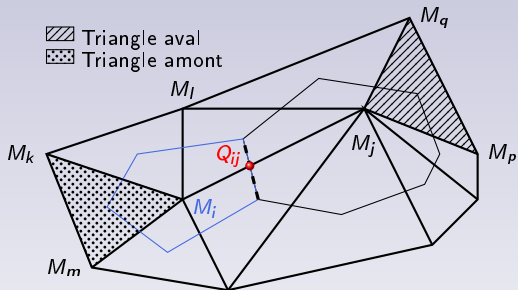
- Reconstruction
- État intermédiaire

## 2 Calcul du pas de temps

## 3 Simulations

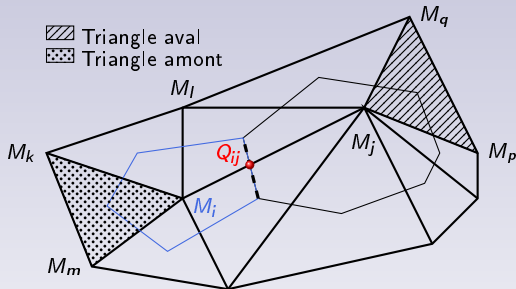
# États reconstruits sur les interfaces

**Problématique** : garantir que  $\mathbf{W}_{ij} \in \mathcal{W}$



# États reconstruits sur les interfaces

**Problématique** : garantir que  $\mathbf{W}_{ij} \in \mathcal{W}$

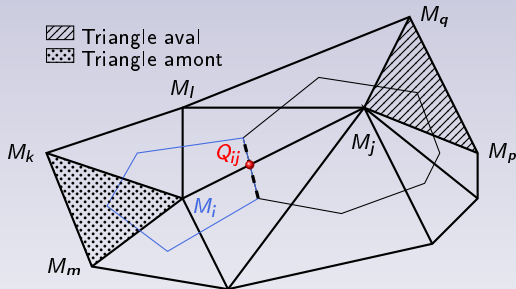


**Reconstruction sur les variables physiques**  $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{u}, p) = \kappa(\mathbf{W})$

$$\xi_{ij} = \xi_i + \alpha_{ij} \varphi(r_{ij})(\xi_j - \xi_i), \quad r_{ij} = \frac{\overline{\Delta \xi_{ij}^{up}}}{\xi_j - \xi_i}$$

# États reconstruits sur les interfaces

**Problématique** : garantir que  $\mathbf{W}_{ij} \in \mathcal{W}$



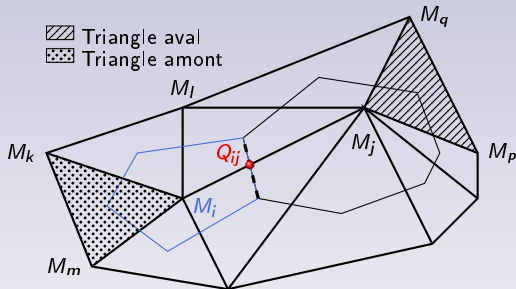
**Utilisation de  $\tau$ -limiteurs**

$$\alpha_{ij} = \frac{M_i Q_{ij}}{M_i M_j}, \quad \tau = \min_{i,j} \frac{1}{\alpha_{ij}}, \quad 0 \leq \varphi(r) \leq \min(\tau r, \tau)$$



# États reconstruits sur les interfaces

**Problématique** : garantir que  $\mathbf{W}_{ij} \in \mathcal{W}$



**Construction d'un gradient en variables conservatives**

$$\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{W}_i + \Delta \mathbf{W}_{ij}, \quad \Delta \mathbf{W}_{ij} = \kappa^{-1}(\mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_{ij}) - \mathbf{W}_i$$

# Point-clé de la démarche

## Construction d'un état intermédiaire physiquement admissible

$$\mathbf{W}_{ij}^n = \mathbf{W}_i^n + \Delta \mathbf{W}_{ij}^n,$$

$$\mathbf{W}_i^* = \frac{1}{\eta_i^*} \left[ \mathbf{W}_i^n - (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \right] = \mathbf{W}_i - \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \Delta \mathbf{W}_{ij}$$

# Point-clé de la démarche

## Construction d'un état intermédiaire physiquement admissible

$$\mathbf{W}_{ij}^n = \mathbf{W}_i^n + \beta_i^n \Delta \mathbf{W}_{ij}^n,$$

$$\mathbf{W}_i^* = \frac{1}{\eta_i^*} \left[ \mathbf{W}_i^n - (1 - \eta_i^*) \beta_i^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \right] = \mathbf{W}_i - \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \Delta \mathbf{W}_{ij}$$

$$\beta_i^n \in [0, 1] \implies \mathbf{W}_{ij}^n = (1 - \beta_i^n) \mathbf{W}_i^n + \beta_i^n [\mathbf{W}_i^n + \Delta \mathbf{W}_{ij}^n] \in \mathcal{W}$$

# Point-clé de la démarche

## Construction d'un état intermédiaire physiquement admissible

$$\mathbf{W}_{ij}^n = \mathbf{W}_i^n + \beta_i^n \Delta \mathbf{W}_{ij}^n,$$

$$\mathbf{W}_i^* = \frac{1}{\eta_i^*} \left[ \mathbf{W}_i^n - (1 - \eta_i^*) \beta_i^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \right] = \mathbf{W}_i - \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \Delta \mathbf{W}_{ij}$$

$$\beta_i^n \in [0, 1] \implies \mathbf{W}_{ij}^n = (1 - \beta_i^n) \mathbf{W}_i^n + \beta_i^n [\mathbf{W}_i^n + \Delta \mathbf{W}_{ij}^n] \in \mathcal{W}$$

On pose :

$$\Delta \mathbf{W}_i^* = - \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \Delta \mathbf{W}_{ij}$$

de sorte que  $\mathbf{W}_i^* = \mathbf{W}_i^n + \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \Delta \mathbf{W}_i^*$ .

Choix de  $\beta_i^n$  de sorte que  $\rho_i^* > 0$  et  $p_i^* > 0$ ?

# Choix de $\beta_i^n$

$$\rho_i^* > 0 \iff \mathcal{P}_1 \left( \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \right) = 1 + D_i^n \left[ \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \right] > 0$$

$$\rho_i^* > 0 \iff \mathcal{P}_2 \left( \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \right) = 1 + B_i^n \left[ \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \right] + A_i^n \left[ \frac{1 - \eta_i^*}{\eta_i^*} \beta_i^n \right]^2 > 0$$

**Densité** Avec  $D_i^n = \frac{\Delta \rho_i^*}{\rho_i^n}$ , on en déduit la condition sur  $\beta_i^n \leq \beta_i^{(1)}$  :

$$\beta_i^{(1)} = \min \left\{ 1, \frac{\eta_i^*}{1 - \eta_i^*} \gamma_i^{(1)} \right\} \quad \text{avec} \quad \gamma_i^{(1)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } D_i^n \geq 0, \\ -\frac{1}{D_i^n}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Pression**  $\beta_i^n \leq \beta_i^{(2)}$  avec ...

# Plan de la partie

## 1 Construction d'états physiques

## 2 Calcul du pas de temps

- Formule algébrique
- Optimisation

## 3 Simulations

# Décomposition convexe

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \eta_i^* \mathbf{W}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \quad \Bigg\| \quad \mathbf{W}_i^{n+1} = \eta_i^* \bar{\mathbf{W}}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \bar{\mathbf{W}}_{ij}$$

# Décomposition convexe

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \eta_i^* \mathbf{W}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \quad \Big\| \quad \mathbf{W}_i^{n+1} = \eta_i^* \overline{\mathbf{W}}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \overline{\mathbf{W}}_{ij}$$

$$\overline{\mathbf{W}}_{ij} = \mathbf{W}_{ij}^n - \Delta t^n \sum_{k=1}^4 \zeta_{ij,k} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ij,k}^n, \mathbf{n}_{ij,k}), \quad j \in \mathcal{V}(i)$$



# Décomposition convexe

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{n}_{ij})$$

$$\mathbf{W}_i^n = \eta_i^* \mathbf{W}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \mathbf{W}_{ij}^n \quad \Bigg\| \quad \mathbf{W}_i^{n+1} = \eta_i^* \overline{\mathbf{W}}_i^* + (1 - \eta_i^*) \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \eta_{ij} \overline{\mathbf{W}}_{ij}$$

$$\overline{\mathbf{W}}_{ij} = \mathbf{W}_{ij}^n - \Delta t^n \sum_{k=1}^4 \zeta_{ij,k} \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ij,k}^n, \mathbf{n}_{ij,k}), \quad j \in \mathcal{V}(i)$$

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{W}}_{ij} = \sum_{k=1}^4 \frac{\zeta_{ij,k}}{\mu_{ij,k}} \overline{\mathbf{W}}_{ij,k} \\ \overline{\mathbf{W}}_{ij,k} = \mathbf{W}_{ij}^n - \Delta t^n \mu_{ij,k} [\mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ij,k}^n, \mathbf{n}_{ij,k}) - \mathcal{F}(\mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{W}_{ij}^n, \mathbf{n}_{ij,k})] \end{cases}$$

# Hypothèses

**Coefficients** : consistance de la décomposition

$$\eta_{ij}\zeta_{ij,1} = \eta_i^* \zeta_{ij}^*, \quad \eta_{ij}\zeta_{ij,2} = \eta_{ik}\zeta_{ik,4}, \quad \eta_{ij}\zeta_{ij,3} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|}, \quad \sum_{k=1}^4 \frac{\zeta_{ij,k}}{\mu_{ij,k}} = 1, \quad \sum_{k=1}^4 \zeta_{ij,k} \mathbf{n}_{ij,k} = \mathbf{0}$$

**Flux**

• Consistance, conservation, continuité

•  $\forall (V, W) \in \mathcal{W}^2, W - \frac{\Delta t}{\ell} [\mathcal{F}(W, V) - \mathcal{F}(W, W)] \in \mathcal{W}$

sous condition CFL  $\Delta t \max_k |\lambda_k(V, W)| \leq \alpha_0 \ell$

**Condition CFL**

$$\Delta t^n \max_{j \in \mathcal{V}(i)} \left\{ \mu_{ij}^*, \max_{1 \leq k \leq 4} \mu_{ij,k} \right\} \times \bar{\lambda}_i^n \leq \alpha_0,$$

$$\bar{\lambda}_i^n := \max_{\substack{j \in \mathcal{V}(i) \\ 1 \leq k \leq 4}} \left\{ |\mathbf{u}_{ij}^n \cdot \mathbf{n}_{ij,k}| + c_{ij}^n, |\mathbf{u}_{ij,k}^n \cdot \mathbf{n}_{ij,k}| + c_{ij,k}^n \right\}$$

# Résolution des contraintes

Avec  $X = \zeta_{ij_0,1}$  pour  $j_0 \in \mathcal{V}(i)$ , on a :

$$\zeta_{ij,1} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Gamma_{ij_0}|} \frac{\eta_{ij_0}}{\eta_{ij}} X, \quad \zeta_{ij}^* = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Gamma_{ij_0}|} \frac{\eta_{ij_0}}{\eta_i^*} X, \quad \zeta_{ij,3} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{\eta_{ij} |\Omega_i|}$$

$$\zeta_{ij,2} = \frac{M_i G_{ijl}}{\eta_{ij}} \left[ \frac{1}{|\Omega_i|} - \frac{\eta_{ij_0}}{|\Gamma_{ij_0}|} X \right], \quad \zeta_{ij,4} = \frac{M_i G_{ijk}}{\eta_{ij}} \left[ \frac{1}{|\Omega_i|} - \frac{\eta_{ij_0}}{|\Gamma_{ij_0}|} X \right]$$

$$\mu_{ij,k} = \frac{|\partial T_{ij}|}{\eta_{ij} |\Omega_i|} - \frac{X}{|\Gamma_{ij_0}|} \frac{\eta_{ij_0}}{\eta_{ij}} (|\partial T_{ij}| - 2|\Gamma_{ij}|), \quad \mu_{ij}^* = \frac{|\partial \Omega_i|}{|\Gamma_{ij_0}|} \frac{\eta_{ij_0}}{\eta_i^*} X$$

On cherche alors à résoudre le problème de minimisation :

$$\mu_i^{\text{opt}} := \min_{0 \leq X \leq X_{\max}} \max_{j \in \mathcal{V}(i)} \left\{ \mu_{ij}^*(X), \max_{1 \leq k \leq 4} \mu_{ij,k}(X) \right\}.$$

# Optimisation de la condition CFL

La solution est donnée par :

$$\mu_i^{\text{opt}}(\eta_i^*) = \begin{cases} \frac{2}{(1 - \eta_i^*)|\Omega_i|} \max_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{\eta_{ij}}, & \text{si } \eta_i^* \geq \bar{\eta}_i^* \\ \frac{|\partial\Omega_i|}{|\Omega_i|} \left[ \min_{j \in \mathcal{V}(i)} \left\{ \eta_i^* \left( 1 - \frac{2|\Gamma_{ij}|}{|\partial T_{ij}|} - \frac{\eta_{ij}|\partial\Omega_i|}{|\partial T_{ij}|} \right) + \frac{\eta_{ij}|\partial\Omega_i|}{|\partial T_{ij}|} \right\} \right]^{-1} \end{cases}$$

En fixant  $\eta_i^* = \bar{\eta}_i^* = \frac{|\partial\Omega_i|}{|\partial\Omega_i| + 2 \max_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|\Gamma_{ij}|}{\eta_{ij}}}$ , la famille de coefficients  $\eta_{ij}$  optimaux

est donnée par :

$$\eta_{ij} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\partial\Omega_i|}$$

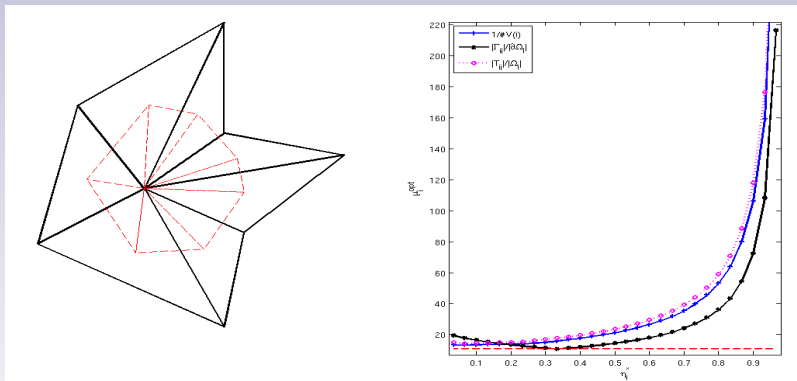
On a alors  $\eta_i^* = 1/3$ .

# Plan de la partie

- 1 Construction d'états physiques
- 2 Calcul du pas de temps
- 3 Simulations**



# Influence du choix de $\eta_{ij}$



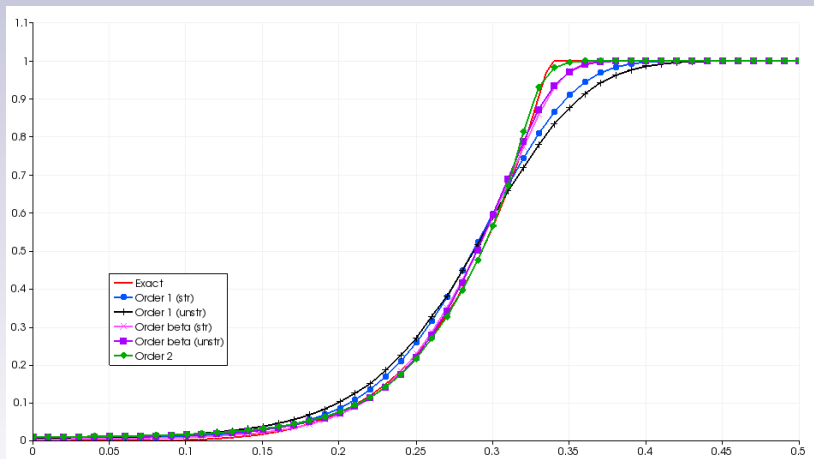
Le coefficient de la CFL optimisée est globalement 10 fois plus petit qu'avec une CFL standard donnée par  $\Delta h_{min}$ .

# Cas-test 1-2-3

$$\left( \begin{array}{c} \rho_0 \\ -\rho_0 u_0 \\ 0 \\ \rho_0 E_0 \end{array} \right) \quad \left| \quad \left( \begin{array}{c} \rho_0 \\ \rho_0 u_0 \\ 0 \\ \rho_0 E_0 \end{array} \right)$$

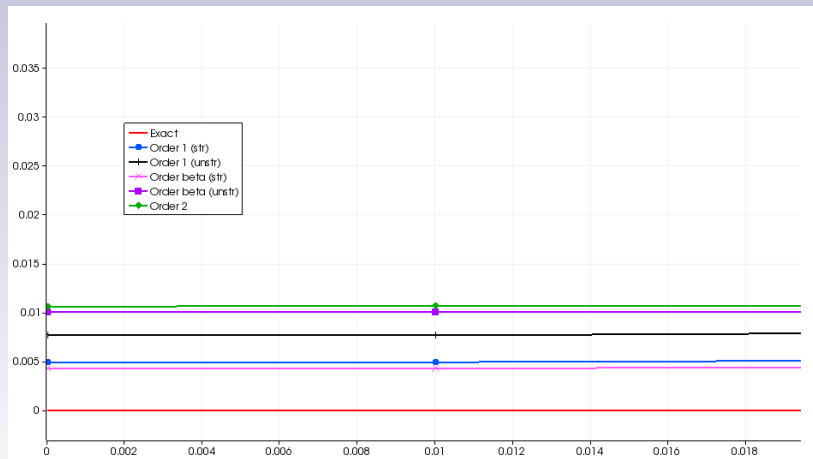
- Le schéma à l'ordre 2 (*i.e.* schéma sans  $\beta_i^n$ ) sur maillage structuré échoue à préserver la positivité de la pression
- Le coefficient  $\beta_i^n$  n'est "activé" (*i.e.* différent de 1) que pour un nombre fini d'itérations et que dans une zone très localisée autour de l'interface
- Dans la zone proche du vide, le schéma avec  $\beta_i^n$  est plus précis

# Cas-test 1-2-3

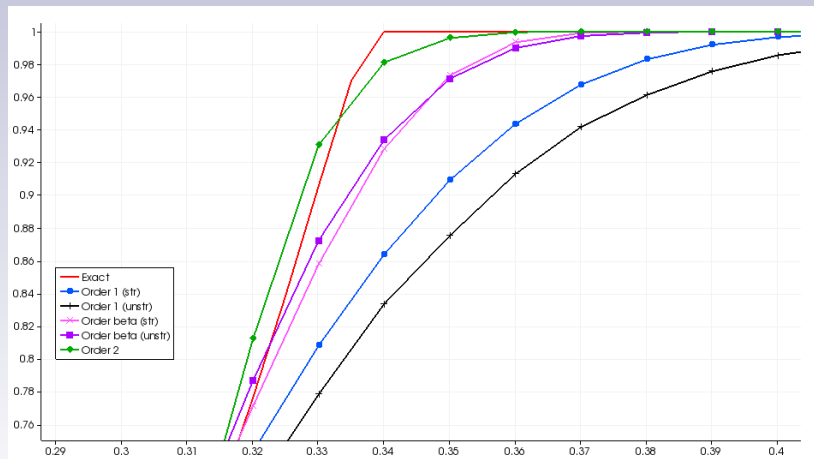




# Cas-test 1-2-3



# Cas-test 1-2-3



# Perspectives

## Bilan

- ✓ Analyse de la robustesse des schémas MUSCL en toute généralité (flux numérique, limiteur)
- ✓ Établissement de conditions (suffisantes) pour garantir l'admissibilité de la solution
- ✓ CFL explicite en fonction du maillage
- ✓ Modifications faciles à implémenter dans un code pré-existant

## À faire

- 🐛 Influence du flux numérique sur l'activation du coefficient  $\beta_i^n$
- 🐛 Analyse des configurations activant le coefficient  $\beta_i^n$
- 🐛 Application de la démarche à d'autres systèmes de lois de conservation avec contraintes



*MERCI DE VOTRE ATTENTION*