

Étude théorique et numérique de la déformation d'une interface séparant deux fluides non-miscibles à bas nombre de Mach

Yohan Penel^{1,2}

¹DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR, CEA Saclay, France

²LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, France

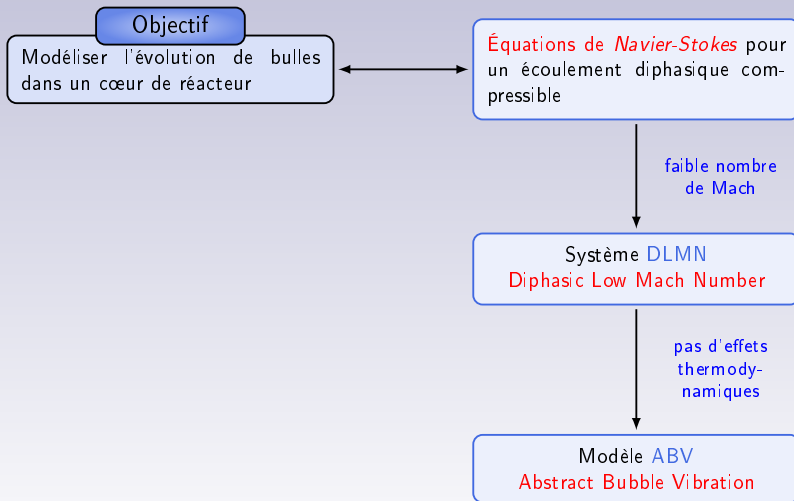
Soutenance de thèse

Villetaneuse

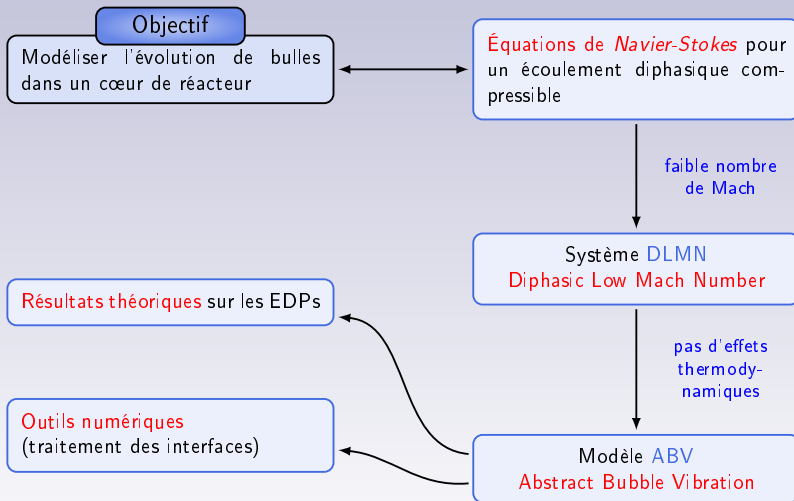
13 décembre 2010



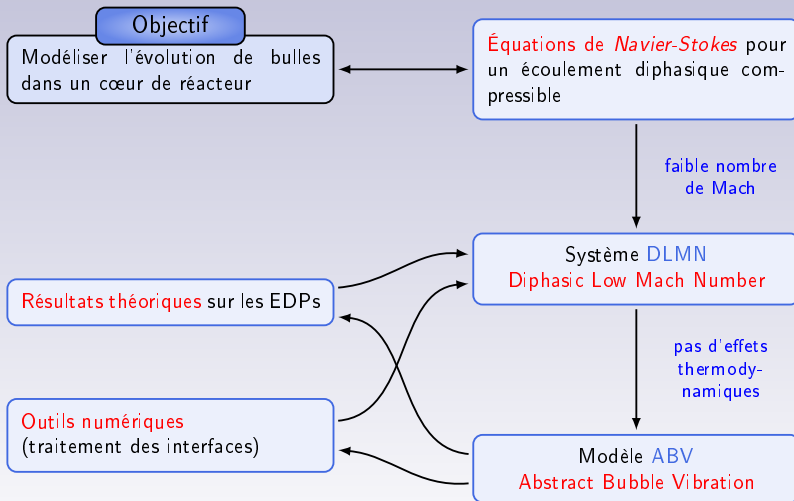
Introduction



Introduction



Introduction



Description de l'étude

Systèmes d'équations aux dérivées partielles

- Définition des **données** (données initiales, conditions aux limites, termes sources, domaine d'étude)
- **Existence** de solutions
- **Unicité** des solutions
- **Influence des données** sur les solutions (propriétés algébriques, régularité)
- **Temps d'existence**

Description de l'étude

Systèmes d'équations aux dérivées partielles

- 🐼 Définition des **données** (données initiales, conditions aux limites, termes sources, domaine d'étude)
- 🐼 **Existence** de solutions
- 🐼 **Unicité** des solutions
- 🐼 **Influence des données** sur les solutions (propriétés algébriques, régularité)
- 🐼 **Temps d'existence**

- 🐼 **Point-clé** : **régularité des données initiales**
 - ➡ **Formulation** des équations
 - ➡ **Méthodes théoriques** mises en œuvre
 - ➡ **Schémas numériques**

Plan de l'exposé

1 Modèles et équations

- Descriptif
- Analyse des modèles

2 Analyse du modèle ABV

- Résultats qualitatifs en dimension quelconque
- Principe du maximum
- Cas particulier de la dimension 1

3 Outils pour la simulation numérique des modèles

- Solutions régulières en dimension 1
- Solutions discontinues en dimension 2

4 Étude du système DLMN

5 Conclusions et perspectives

Plan de la partie

1 Modèles et équations

- Descriptif
- Analyse des modèles

2 Analyse du modèle ABV

3 Outils pour la simulation numérique des modèles

4 Étude du système DLMN

5 Conclusions et perspectives



Écoulement diphasique compressible

Origine

$$\text{Navier-Stokes} \quad \begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Nomenclature

👉 Y : fraction massique de la phase vapeur (fluide 1)

👉 T : température

👉 P : pression

👉 \mathbf{u} : vitesse globale

👉 $E = \varepsilon + |\mathbf{u}|^2/2$: énergie totale

👉 ρ : densité

👉 \mathbf{g} : champ de gravité

👉 $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur de contraintes de Cauchy

👉 κ : conductivité thermique

Écoulement diphasique compressible

Origine

$$\text{Navier-Stokes} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{array} \right.$$

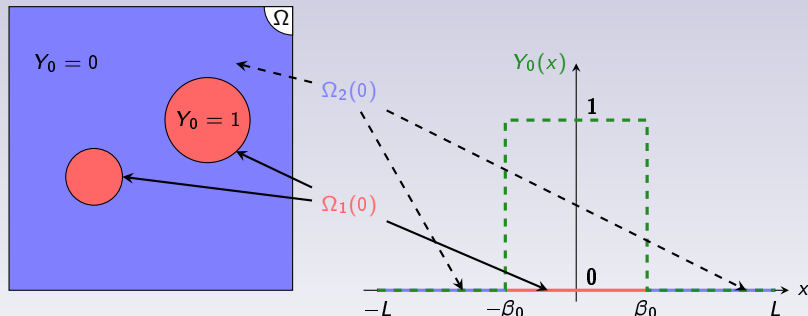
Conditions initiales et aux limites

- Domaine d'étude : Ω , **borné** dans \mathbb{R}^d ($d \in \{1, 2, 3\}$) et **lipschitzien**
- Données : $\mathbf{u}_0, Y_0, T_0, P_0$
- Lois d'état : $\varepsilon(Y, T, P), \rho(Y, T, P)$
- Conditions sur le bord : $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \nabla T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$

Modélisation des bulles

Condition Initiale

$$Y(t=0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1(0), \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2(0). \end{cases}$$



- Hypothèse de **non-miscibilité** des deux phases (fluides) : singularité de Y
- **Interface** de la bulle = surface de **discontinuité** de Y

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Équations de *Navier-Stokes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{array} \right.$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$



Utilisation de l'équation de conservation de la masse

2nd principe de la thermodynamique

$$D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

Formulation non conservative

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T D_t P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \underline{\underline{\sigma}} :: \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Formulation adimensionnée

Hypothèse : les deux fluides ont des grandeurs caractéristiques communes

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3, \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \underline{\underline{\sigma}} :: \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN (S. Dellacherie, '05)

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \end{cases}$$



Développement asymptotique
par rapport à $M \ll 1$

Projection de Leray

Idées de Majda & Sethian
puis de Embid ('80s)



Réécriture de la loi de conservation
de la masse

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$

$$\Rightarrow P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Formulation adimensionnée

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \underline{\sigma} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3, \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \underline{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN (S. Dellacherie, '05)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right.$$

$$\underline{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{Id} + 2\mu D(\mathbf{u})$$

Système DLMN (Y.P., '09)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right.$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN- μ

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \hat{\pi} + \mu_0 \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases}$$



$\mu = \mu_0$ constant

$$2\nabla \cdot (D(\mathbf{u})) = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$



Système DLMN (Y.P., '09)

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases}$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN- μ

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \hat{p} + \mu_0 \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{u} = \nabla \phi$$

Système DLMN-potentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho c_p (\partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T) = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right.$$

Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN- β

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \alpha \rho_0 (\partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T) = \mathcal{G}_\theta. \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_\theta = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$



Système DLMN-potentiel

$$\beta \equiv \beta_0$$

$$\Rightarrow P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t) = 0$$

$$\Rightarrow P(t) = p_0$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_\theta = \beta_0 \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho c_p (\partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T) = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases}$$



Généalogie des modèles étudiés (calculs formels)

Système DLMN- β

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \alpha \rho_0 (\partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T) = \mathcal{G}_\theta. \end{cases}$$



Modèle ABV

Changement de second membre

Absence d'effets thermodynamiques

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_Y(t, \mathbf{x}) := \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right]. \end{cases}$$

Modèle ABV

Équations

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \\ \Delta \phi = \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right], \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Commentaires sur le modèle

- Couplage non-linéaire **hyperbolique-elliptique**
- Système **intégré-différentiel**
- Conditions de compatibilité pour ϕ_0 et de jauge pour ϕ (problème de *Laplace-Neumann*)
- **Données** : $Y_0, \psi \in \mathcal{C}^0(0, +\infty)$ et Ω

$ABV[Y_0, \psi, \Omega]$

Système DLMN

Équations

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right.$$

Gain de l'approche « bas Mach »

- Découplage (P, π) : **filtrage des ondes acoustiques**
- Élimination d'un **terme non-linéaire** $(\underline{\sigma} :: \nabla \mathbf{u})$
- Modèle toujours **compressible** : $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \neq 0$, gradients de température
- Convergence vers un modèle incompressible lorsque les **flux thermiques** tendent vers 0

Plan de la partie

- 1 Modèles et équations
- 2 **Analyse du modèle ABV**
 - Résultats qualitatifs en dimension quelconque
 - Principe du maximum
 - Cas particulier de la dimension 1
- 3 Outils pour la simulation numérique des modèles
- 4 Étude du système DLMN
- 5 Conclusions et perspectives

Problème bien posé

Théorème (S. Dellacherie & O. Lafitte, '05 ; Y.P., '10)

Soit $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$. Alors il existe $\mathcal{T} > 0$ pour lequel le modèle ABV admet une unique solution classique Y sur $[0, \mathcal{T}]$.

On a noté $s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$. La régularité exacte de la solution est :

$$Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) := \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H^s(\Omega)).$$

Outils

- Analyse des espaces $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ (propriétés d'inclusion, stabilité par produit)
- Amélioration des estimations *a priori* pour les solutions de l'équation de transport linéaire
- Construction d'une solution par un processus de type « itérées de *Picard* »

Analyse du résultat

Proposition (Y.P., '10)

La solution existe sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$, avec $\mathcal{T}_* > 0$ donné par :

$$\left\| Y_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\|_s \cdot C_{abv}(s, d, \Omega) \cdot \int_0^{\mathcal{T}_*} |\psi(t)| \, dt \leq 1.$$

Commentaires

- 👉 Trois contraintes de convergence dans [*Dellacherie* et *Lafitte*, 2005], réduites à **une seule** ici
- 👉 Temps d'existence* **propre à la méthode** choisie pour construire une solution
- 👉 Formule compatible avec les cas particuliers : $Y_0 \equiv cste$ et $\psi \equiv 0$
- 👉 Solution **globale en temps** pour $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ de norme suffisamment petite

* **Abus de langage** : intervalle de temps sur lequel on est certain qu'il existe une solution.

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{I}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{I})$, l'application $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Reformulation adaptée à l'espace $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$:

$$\begin{cases} Y(t, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) - \int_0^t \nabla\phi \cdot \nabla Y(\tau, \mathbf{x}) d\tau, \\ \Delta\phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right). \end{cases}$$

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{I}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{I})$, l'application $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p.
- **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$
- **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{I}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{I})$, l'application $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- 👉 **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p.
- 👉 **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$
- 👉 **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{I}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{I})$, l'application $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- 🐼 **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p.
- 🐼 **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$
- 🐼 **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{I}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{I})$, l'application $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- 🐞 **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p.
- 🐞 **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$
- 🐞 **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$.
Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Pour $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$, la solution est unique et vérifie le principe du maximum. La suite (μ_n) est alors décroissante et converge vers $|\Omega_1(t)|/|\Omega|$, pour $\Omega_1(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega : Y(t, \mathbf{x}) = 1\}$.

Il en est de même pour $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$, sous réserve d'existence.

Qu'en est-il pour les données $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$?

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$.
Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Reformulation adaptée au concept de **solutions faibles** :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \cdot (Y \nabla \phi) = \psi(t) Y \left(Y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ Y(t=0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

En utilisant le **principe de renormalisation**, on prouve :

Lemme

Les termes de la suite (μ_n) vérifient les équations (au sens fort) :

$$\mu_n' = \psi(\mu_{n+1} - \mu_1 \mu_n).$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$.
Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Théorème (Y.P., '10)

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, dx}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Théorème (Y.P., '10)

Soit Y une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. On suppose que Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ presque partout. Alors il en est de même pour $Y(t, \cdot)$ pour presque tout t .

Le résultat précédent s'étend au cas où Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ par une translation-dilatation permettant de se ramener au cas $[0, 1]$.

Moyenne des solutions (remarques)

- La fonction μ_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- Lorsque Y est la fonction indicatrice du domaine $\Omega_1(t)$, alors :

$$\mu_1(t) = \mu_n(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|}$$

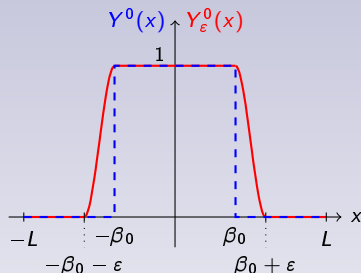
représente le volume relatif de la bulle. On note l'influence du domaine.

- Si Ψ est **périodique**, alors μ_n l'est.
- On peut alors récrire le système comme un **modèle purement différentiel** :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ Y(0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi - \psi(t)Y = -\psi(t)\mu_1(t), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \mu_1(t) = \frac{\int_{\Omega} Y_0(\mathbf{x}) \exp[\Psi(t)Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}.$$

- Le résultat fournit un **test de précision** pour les simulations.

Perspective



$$Y_{\varepsilon}^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-L, -\beta_0 - \varepsilon] \cup [\beta_0 + \varepsilon, L], \\ \Lambda\left(2\frac{x + \beta_0}{\varepsilon} + 1\right), & \text{si } x \in [-\beta_0 - \varepsilon, -\beta_0], \\ \Lambda\left(2\frac{\beta_0 - x}{\varepsilon} + 1\right), & \text{si } x \in [\beta_0, \beta_0 + \varepsilon], \\ 1, & \text{si } x \in]-\beta_0, \beta_0[. \end{cases}$$

Réécriture simplifiée

On se place dans le domaine $\Omega =]-L, L[$.

En dimension 1, le système s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} \partial_t Y + u \cdot \partial_x Y = 0, \\ Y(t=0, \cdot) = Y^0, \\ u(t, x) = \psi(t) \left(\int_{-L}^x Y(t, x') dx' - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right). \end{cases}$$

On suppose que la régularisée Y_ε^0 de Y^0 est dans $H^2(-L, L)$, de sorte que l'on puisse appliquer le théorème d'existence et d'unicité en temps fini. On note \mathcal{T}_ε le temps d'existence donné par la proposition. On vérifie alors que $\mathcal{T}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

On montre cependant qu'il existe des solutions **globales en temps**.

Méthode des caractéristiques

Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on note $(Y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ la solution associée et on introduit le problème :

$$\frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)), \quad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

$x_0 \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)$ est un difféomorphisme de $] -L, L[$ dans lui-même et est donc inversible (pour $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon]$).

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)).$$

Cette formule permet de justifier que Y_ε conserve le même profil que Y_ε^0 , à savoir :

- $Y_\varepsilon(t, x) = 1$ pour $x \in [-\beta_\varepsilon(t), \beta_\varepsilon(t)]$;
- $Y_\varepsilon(t, x) = 0$ pour $x \notin [-\delta_\varepsilon(t), \delta_\varepsilon(t)]$;

Méthode des caractéristiques

Théorème (Y.P., '10)

Soient $Y^0 \in L^\infty(-L, L)$ et ψ continue. Alors une solution faible globale en temps de $\mathcal{ABV}[Y^0, \psi, \Omega]$ est donnée par $\mathcal{Y}(t, x) = Y^0(\Theta_t^{-1}(x))$, où Θ_t^{-1} est la réciproque (par rapport à x_0) de la fonction :

$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy} - L.$$

Idées de base dans la preuve

- Changement de variables lipschitzien [Evans et Gariépy, **CRC-Press**, 1992]
- Validité de l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$
- Calcul de la quantité : $\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \iint \mathcal{Y}[\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, x) dt dx$

Analyse des résultats en dimension 1

- Expression de l'unique solution pour $Y^0 \in H^2(-L, L)$, **globale en temps**.
- Existence de **solutions faibles globales en temps**.
- Pour $Y^0 = \mathbf{1}_{[-\beta_0, \beta_0]}$, il existe une solution de la forme $\mathbf{1}_{[-\beta(t), \beta(t)]}$, ce qui légitime l'étude de ce système dans le cadre de la **modélisation des bulles**. Cette solution est explicite et peut être obtenue grâce aux relations de *Rankine et Hugoniot*.
- La méthode s'adapte au **cas radial** (en dimensions 2 et 3) et fournit également des solutions explicites.

Plan de la partie

- 1 Modèles et équations
- 2 Analyse du modèle ABV
- 3 Outils pour la simulation numérique des modèles**
 - Solutions régulières en dimension 1
 - Solutions discontinues en dimension 2
- 4 Étude du système DLMN
- 5 Conclusions et perspectives

Schémas MOC

Objectifs

- Simuler les **solutions régulières** de l'équation $\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = f$;
- Atteindre **l'ordre 2** en espace-temps.

Idée

La méthode des caractéristiques fournit l'égalité :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})) + \int_{t - \Delta t}^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma,$$

pour \mathcal{X} solution de :

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x})), \quad \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Schémas MOC

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Deux étapes (découplage espace-temps)

- Approximation $\hat{\xi}_i^n$ du **pied de la caractéristique** ξ_i^n : montée à l'ordre 2 par un développement limité de \mathcal{X} autour de (t^n, x_i)
- **Approximation de $Y(t^n, \hat{\xi}_i^n)$** , ne connaissant que les valeurs de la solution aux nœuds du maillage : montée à l'ordre 2 par une interpolation ... d'ordre 2

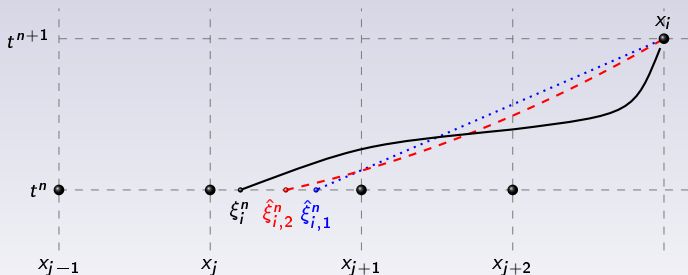
Choix

Garantir le **principe du maximum** sous l'hypothèse que la solution est régulière.

Schémas MOC

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

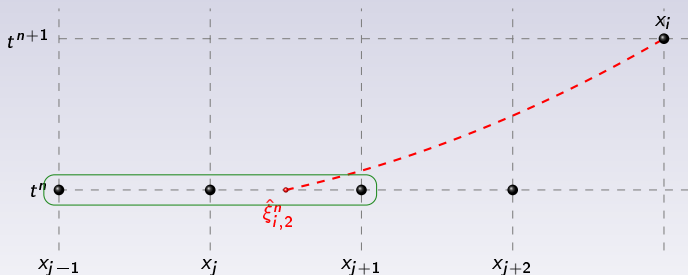
$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$



Schémas MOC

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

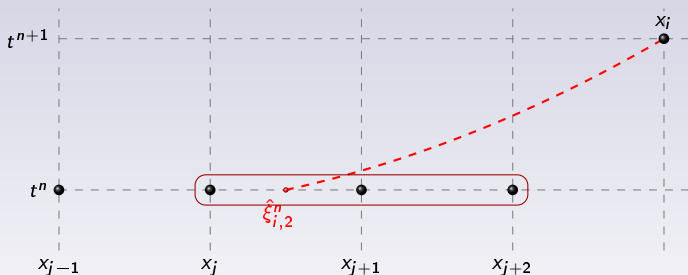
$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$



Schémas MOC

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

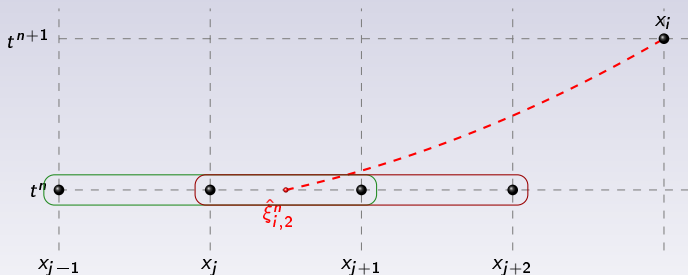
$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$



Schémas MOC

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$



Analyse du schéma

Stabilité inconditionnelle (au sens de *Von Neumann*)

Consistance inconditionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) := & \frac{1}{\Delta t} \left[Y(t^{n+1}, x_i) - \frac{\theta^2}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 2Y(t^n, x_j) + Y(t^n, x_{j+1})] \right. \\ & \left. + \frac{\theta}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 4Y(t^n, x_j) + 3Y(t^n, x_{j+1})] - Y(t^n, x_{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

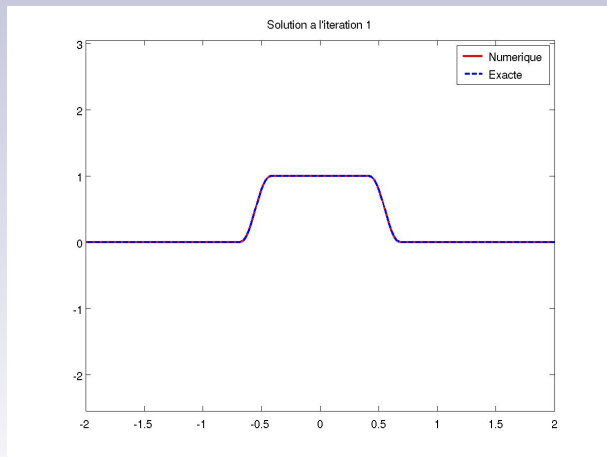
Pour $\Delta t = \Delta x^\alpha$, on a :

- $\mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta t^{1/\alpha}) = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\alpha \leq 1$;
- $\mathcal{E}_i^n(\Delta x^\alpha, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2)$, $\alpha > 1$.

Dans le cas général :

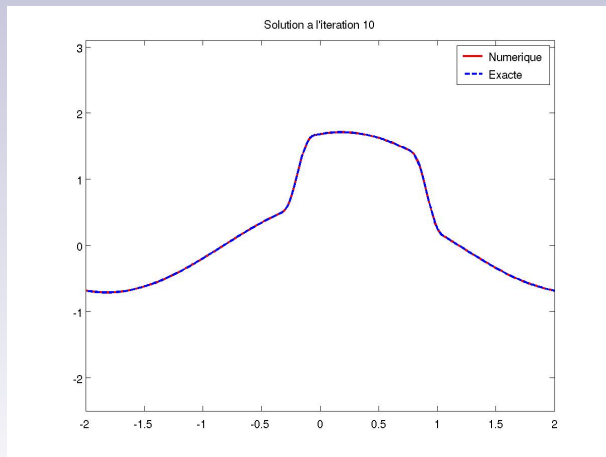
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



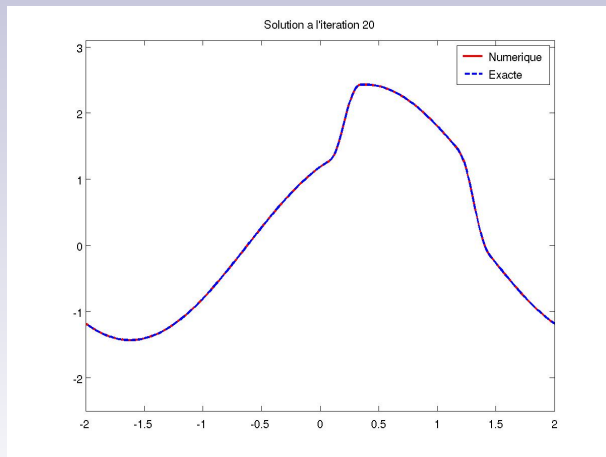
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



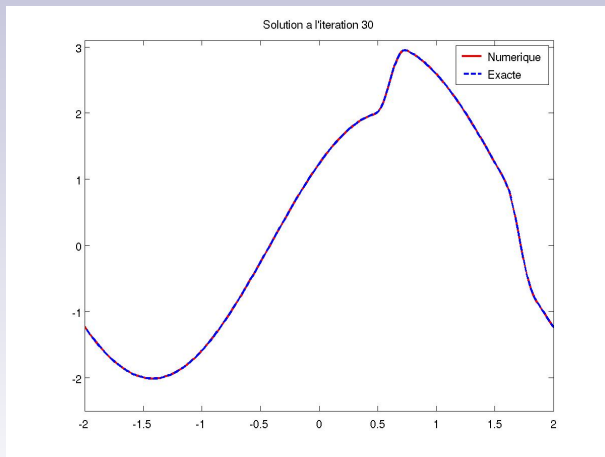
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



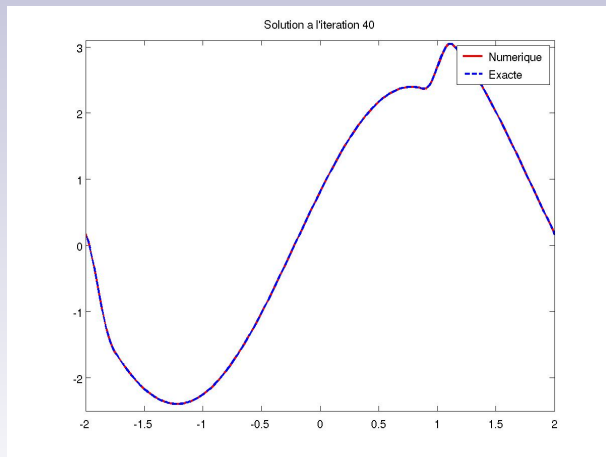
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



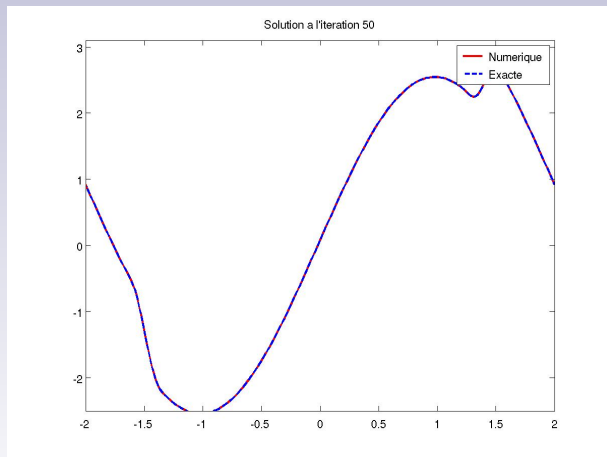
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



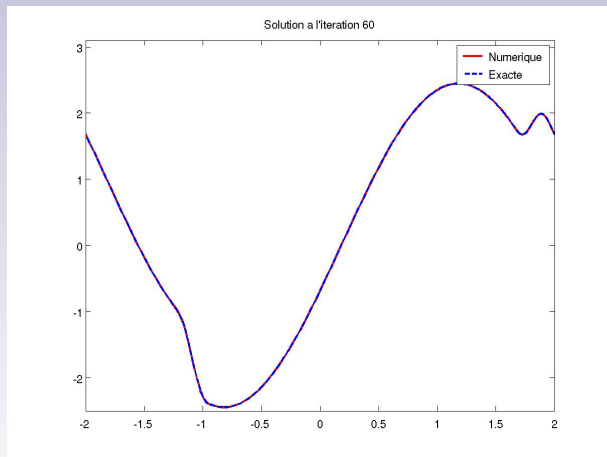
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



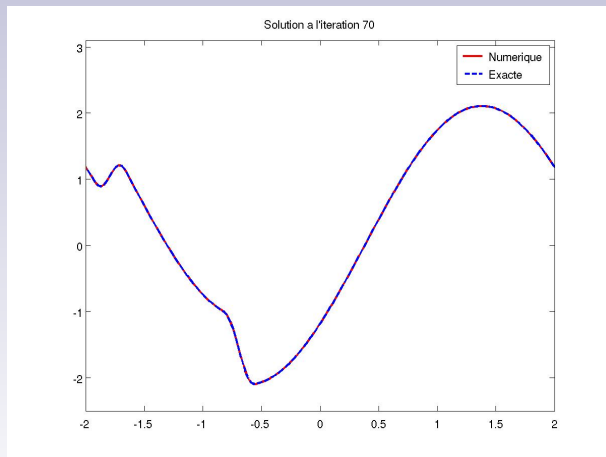
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



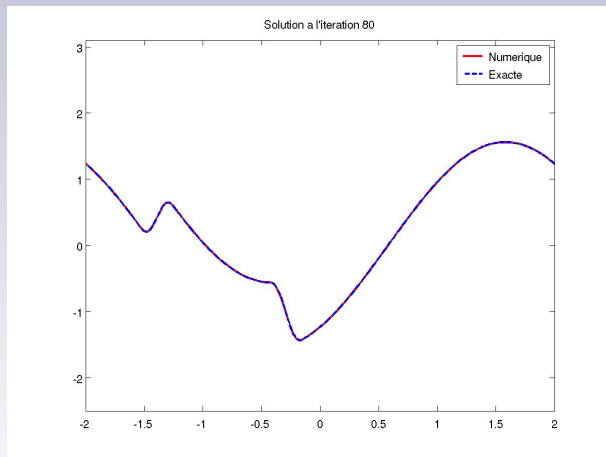
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



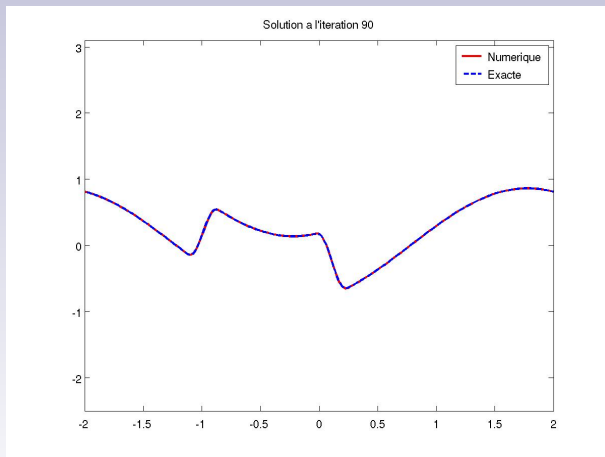
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



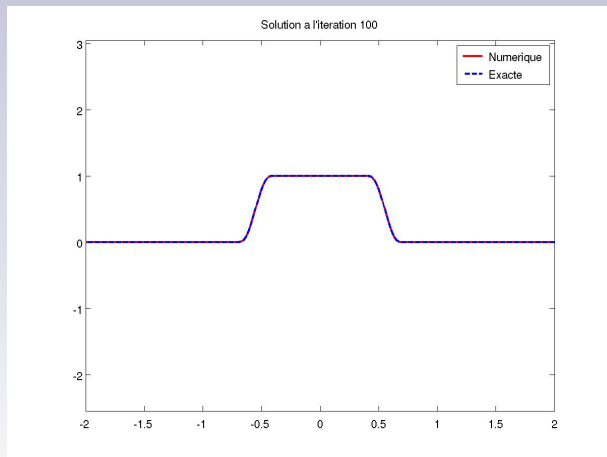
$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100 \quad N_x = 450$$

Simulations du modèle ABV

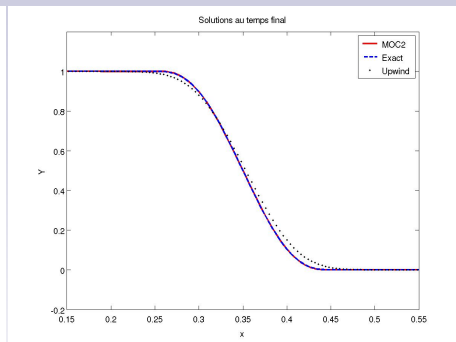
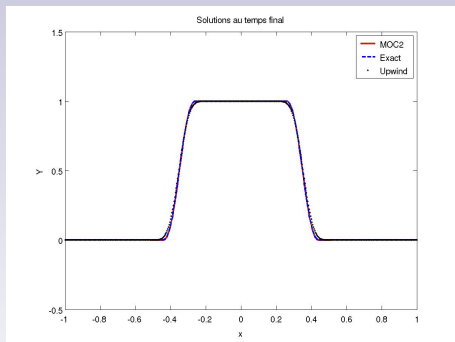
Données

- $\Omega = [-1, 1]$
- $\psi(t) = 2 \cos(30t)$
- Régularisations polynomiales de degrés 5, 1 et 0
- 200 itérations, 500 points en espace

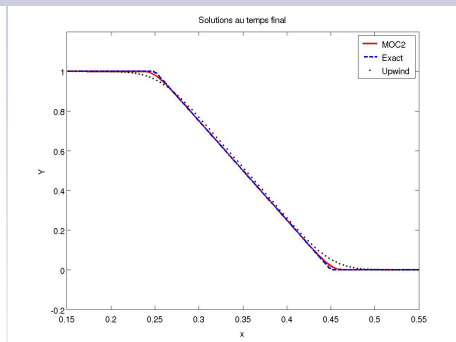
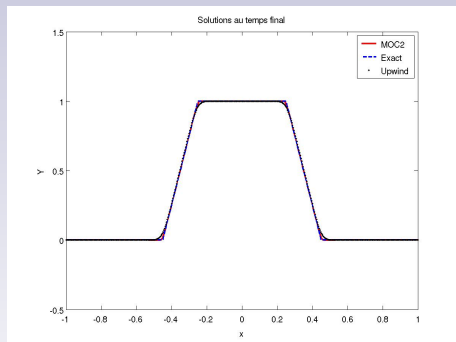
Approximation de la vitesse

$$U_i^n = \psi(t^n) \Delta x \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} - \frac{x_i + 1}{2} \sum_{j=1}^{N_x-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} \right].$$

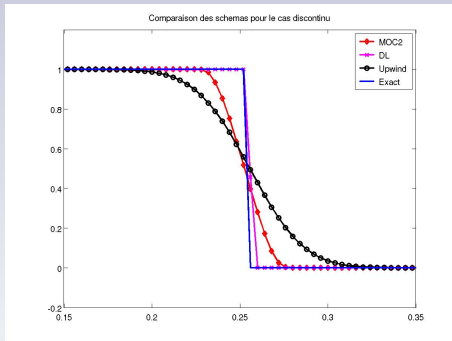
Simulations du modèle ABV (P_5)



Simulations du modèle ABV (P_1)



Simulations du modèle ABV (P_0)



Combinaison d'algorithmes

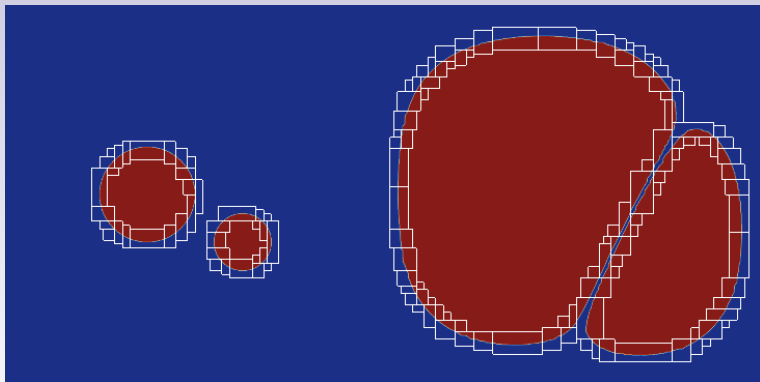
Algorithme

- *Capture de l'interface via* la résolution de l'équation de transport sur Y
 - ➔ Utilisation d'un schéma antidissipatif [*Després & Lagoutière, '01*]
- Amélioration de la précision par un **algorithme de raffinement adaptatif de maillages (AMR)** pour l'équation hyperbolique
 - ➔ **Marquage** des cellules à raffiner selon critère
 - ➔ **Regroupement** des cellules marquées en **patches** (algorithme **Grouping-Clustering** [*Berger & Oliger, '84*])
 - ➔ **Structure hiérarchique** de maillages (maillages **properly nested** [*Quirk, '91*])
- Amélioration de la précision par l'**algorithme LDC** pour l'équation elliptique [*Hackbush, '84*]

Projet **CEA-ONERA** ayant fait l'objet du stage d'*Anouar Mekkas* en 2008 co-encadré par *J. Ryan, S. Dellacherie* et Y.P.

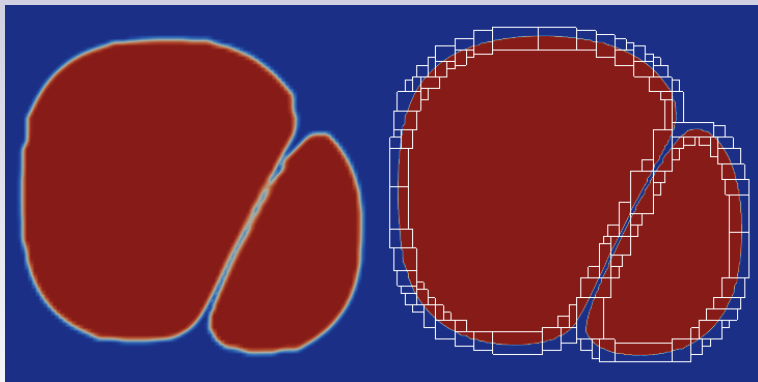
Simulations du modèle ABV

On prend ici $\Omega =]-1, 1[^2$, $\psi(t) \equiv 1$, $\Delta x = \Delta y = 1/50$ et un taux de raffinement égal à 2.



Simulations du modèle ABV

On prend ici $\Omega =]-1, 1[^2$, $\psi(t) \equiv 1$, $\Delta x = \Delta y = 1/50$ et un taux de raffinement égal à 2.



Plan de la partie

- 1 Modèles et équations
- 2 Analyse du modèle ABV
- 3 Outils pour la simulation numérique des modèles
- 4 Étude du système DLMN**
- 5 Conclusions et perspectives



Modèle et hypothèses

Équations

$$\begin{cases} \partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p [\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T] = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases}$$

On note $\boldsymbol{\theta} = (Y, T, P)$.

Remarques préalables

- Compatibilité entre les données initiales : $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \mathcal{G}_{\theta_0}$
- Contraintes physiques : $\boldsymbol{\theta} \in \Theta = \{\vartheta \in \mathbb{R}^3 : \vartheta_1 \in [0, 1], \vartheta_2 > 0, \vartheta_3 > 0\}$
- Nécessité de définir la dépendance des variables annexes par rapport à $\boldsymbol{\theta}$

Modèle et hypothèses

On pose $\Xi = \{\rho, \kappa, \alpha, c_p, \mu, \beta, \Gamma\}$.

Hypothèse 1

En notant, pour $\xi \in \Xi$, $\xi_i(T, P)$ la loi d'état ou de comportement dans le fluide i , on suppose que $\xi(Y, T, P) = \ell_\xi(Y, \xi_1(T, P), \xi_2(T, P))$, avec $\ell_\xi \in \mathcal{L}$, pour \mathcal{L} défini comme l'ensemble des fonctions $\ell \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ telles que :

- ❶ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \ell(y, x_1, x_2) = \ell(1 - y, x_2, x_1)$;
- ❷ $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ell(1, x_1, x_2) = x_1$;
- ❸ $\forall (y, x_1) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \ell(y, x_1, x_1) = x_1$.
- ❹ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, x_1 x_2 \neq 0 \implies \ell(y, x_1, x_2) \neq 0$;
- ❺ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, x_1 x_2 > 0 \implies x_1 \ell(y, x_1, x_2) > 0$;

Ces hypothèses permettent de garantir la régularité des paramètres, leur signe et la possibilité d'utiliser des inégalités de composition. Cela autorise la prise en compte de **lois d'état très générales**.

Résultat d'existence en temps fini

Théorème (Y.P., '09)

Soit s un entier tel que $s \geq s_0 + 3$. On suppose que $(Y_0, T_0, P_0) \in H^s(\mathbb{T}^d)$ et $\mathbf{u}_0 \in H^{s-1}(\mathbb{T}^d)$ vérifient les hypothèses de compatibilité. Alors sous l'hypothèse 1, il existe un temps $\mathcal{T} > 0$ pour lequel il existe une unique solution classique $(Y, T, P, \mathbf{u}, \nabla\pi)$ au système DLMN, de régularité :

- $Y \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $(T, P) \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t(Y, T, P) \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$,
- $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t \mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$,
- $\nabla\pi \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$.

De plus, pour tout $(t, \mathbf{x}) \in [0, \mathcal{T}] \times \mathbb{T}^d$, $(Y, T, P)(t, \mathbf{x}) \in G_0$.

$$\mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d) := \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H^s(\Omega)) \cap L^2([0, \mathcal{T}], H^{s+1}(\Omega)).$$

Analyse du résultat

- Même schéma de preuve que pour le modèle ABV
- Amélioration des estimations *a priori* pour les **équations d'advection-diffusion**
- Transformation de l'EDO sur la pression en équation d'advection-diffusion (équivalente) pour unifier le comportement de T et P
- **4 contraintes de temps** (non-linéaires)
 - ➔ Plus les normes de *Sobolev* des données initiales sont grandes, plus le temps est petit
- **Domaine périodique** pour éviter les termes de bord dans les intégrations par parties (pour la prise en compte de domaines bornés quelconques, nécessité d'utiliser des inégalités de trace et donc d'élever le degré de régularité minimal)

Plan de la partie

- 1 Modèles et équations
- 2 Analyse du modèle ABV
- 3 Outils pour la simulation numérique des modèles
- 4 Étude du système DLMN
- 5 Conclusions et perspectives**



Bilan (résultats)

📌 Modèle ABV

- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini avec estimation du temps d'existence
- ➡ Solutions (faibles et classiques) **globales en temps** en dimension 1, et en dimensions 2 / 3 (symétrie radiale) : existence de **solutions « bulles »**
- ➡ **Formules explicites** de solutions particulières et de la moyenne des solutions
- ➡ Construction d'un **schéma** en dimension 1 pour les solutions classiques, **inconditionnellement stable et consistant d'ordre 2** vérifiant le principe du maximum
- ➡ Couplage d'algorithmes (DL, AMR, LDC) pour le **traitement des discontinuités**

📌 Système DLMN

- ➡ **Reformulation** de certains termes
- ➡ Étude des **non-linéarités** pour la prise en compte de lois d'état générales
- ➡ Amélioration d'**outils théoriques** d'étude des EDPs (estimations d'énergie, ...)
- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini

Bilan (pistes de recherche)

- Traitement des données L^∞ (**solutions faibles**) en dimension quelconque pour les deux systèmes
- Justification de l'**existence globale** pour le modèle ABV
- **Extensions des théorèmes d'existence** à des indices de *Sobolev* non entiers (ABV) ou à des domaines bornés quelconques (DLMN)
- Extension du schéma MOC à la **dimension 2** et aux maillages cartésiens **non uniformes**
- **Couplage** de l'algorithme AMR avec des schémas numériques pour les équations d'advection-diffusion
- Étude de l'**ordre 1** dans le développement asymptotique
- **Justification** de la dérivation des modèles dans le cas faible
- **Enrichissement** du modèle (tension de surface, changement de phase, ...)



MERCI DE VOTRE ATTENTION